INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL
Matemática 1, 2009/2010 - 1º Semestre
Exame em Época de Recurso, 27 de Janeiro de 2010 Duração: 2 horas

Nome: ____________________

Nº de Aluno: ________ Curso: ______________ Classificação: ________

Pergunta	I.1	I.2	I.3	I.4	Total
Cotação	1.0	1.0	1.0	1.0	4.0
Class.					

Pergunta	II.1a	II.1b	II.2a	II.2b	II.3a	II.3b	II.3c	II.3d	II.4a	II.4b	II.4c	II.5	Total
Cotação	2.0	1.0	0.5	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.5	1.5	1.5	2.0	16.0
Class.													

PARTE I: Perguntas de escolha múltipla (4 valores)

Cada resposta correcta vale 1,0 valores e cada resposta incorrecta é penalizada em 0,5 valores.

A cotação mínima na primeira parte é de zero valores.

1. Sejam $\vec{u} = (1, 0, 2, 0)$ e $\vec{v} = (\alpha, 1, 1, \pi)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. O valor de α para o qual os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais é:

☐ -2 ☐ π

☐ 0 ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta

2. A expressão $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} \ln(t+1)dt$ é igual a:

☐ $x^2\ln(x^2+1)$ ☐ $\ln(2x)$

☐ $2x\ln(x^2+1)$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta

3. A soma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-\tfrac{1}{2})^n + (\tfrac{1}{2})^n\right]$ é igual a:

☐ $\dfrac{2}{3}$ ☐ 0

☐ $\dfrac{8}{3}$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta

4. Sejam A, B, P, X matrizes $n \times n$, com $|P| \neq 0$. E seja $\mathbf{0}$ a matriz nula, igualmente $n \times n$. A equação $XP + AB = \mathbf{0}$ tem por solução:

☐ $X = -P^{-1}AB$ ☐ $X = -P^{-1}BA$

☐ $X = -ABP^{-1}$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta

PARTE II: Perguntas de desenvolvimento (16 valores)

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja o sistema de equações $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-\alpha z=2 \\ -x+z=\beta \end{cases}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   (a) Escreva este sistema sob forma matricial e classifique-o em função dos valores de α e β, indicando, nos casos adequados, o número de graus de liberdade.
   (b) Determine o valor de x para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ usando a Regra de Cramer.

2. Sejam os vectores $\vec{v}_1 = (1,0,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1,k)$ e $\vec{v}_3 = (0,0,1)$, onde $k \in \mathbb{R}$.
   (a) Determine se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ formam um conjunto de vectores linearmente independentes. Justifique a sua resposta.
   (b) Calcule o valor de k que minimiza a distância entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

3. Considere a função $f(x) = x^5$.
   (a) Esboce o gráfico de f, determinando analiticamente e classificando o(s) ponto(s) de estacionariedade da função.
   (b) Seja a constante $k \in \mathbb{R}^+$. Calcule a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abcissas, para $x \in [-k;k]$.
   (c) Seja a constante $k \in \mathbb{R}^+$. Calcule $\int_{-k}^{k} f(x)dx$.
   (d) Seja a função g:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciável duas vezes em $\mathbb{R}$ e com a propriedade $g(0) \neq 0$. Sabendo que $x=0$ é um ponto de estacionariedade de g e que $g''(0) > 0$, demonstre que $x=0$ é um ponto de mínimo local da função $h(x) = f[g(x)]$.

4. Seja a função $f(x) = \sqrt{x}$.
   (a) Determine a aproximação linear de f em torno do ponto $x=1$ e utilize-a para obter um valor aproximado do número $\sqrt{1,1}$.
   (b) Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{1}{f(x)} \cos(f(x))dx$.
   (c) Calcule, sem recurso a casos notáveis, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin[f(x)]}{f(x)}$.

5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ funções diferenciáveis no seu domínio. Definindo $u = g(x)$, mostre que $El_x f[g(x)] = El_u f(u) \cdot El_x u$.