LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Matemática 2

Lic. em Economia, Gestão e Finanças

Data: 4 de Julho de 2017 **Duração:** 1H

Teste Final

Atenção: Esta prova deve ser entregue ao fim de 1 Hora. Deve justificar detalhadamente todas as suas respostas.

1. Determine a solução do problema de valores iniciais $y'' + 2y' + 2y = 2x$, em que $y(0) = y'(0) = 0$. (25)

Solução:

Trata-se de uma equação diferencial linear, de segunda ordem, com coeficientes constantes, não homogénea. Usando o princípio de sobreposição, podemos escrever a solução geral desta equação como $y = y_h + y_p$, em que y_h é a solução geral da equação homogénea $y_h'' + 2y_h' + 2y_h = 0$, e y_p é uma solução particular da equação completa.

1. O polinómio característico da equação $y_h'' + 2y_h' + 2y_h = 0$ é $P(D) = D^2 + 2D + 2$, sendo as suas raízes $D = -1 \pm i$. Assim,

$$y_h(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Como o segundo membro da equação é um polinómio de grau 1, procuramos uma solução particular que seja um polinómio de grau 1, isto é, $y_p(x) = k_1 x + k_2$. Nesse caso temos que $y_p'(x) = k_1$, $y_p''(x) = 0$. Substituindo na equação obtemos

$$0 + 2k_1 + 2(k_1 x + k_2) = 2x \Leftrightarrow (2k_1 + 2k_2) + 2k_1 x = 0 + 2x.$$

Daqui se retira que $k_1 = 1$ e $k_2 = -1$, pelo que $y_p(x) = x - 1$ é uma solução particular da equação.

3. A solução geral é então dada por

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x - 1,$$

e a sua derivada é

$$y'(x) = -e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x}(-c_1 \sin x + c_2 \cos x) + 1$$

4. Finalmente, aplicamos as condições iniciais

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - 1 = 0 \\ -c_1 + c_2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases},$$

obtendo a solução pedida

$$y(x) = e^{-x} \cos x + x - 1.$$

2. Determine a solução geral da equação diferencial $y' = e^{-y}(2x-4)$ e apresente a solução na forma explícita. Discuta o domínio de definição da solução. (15)

Solução:

Trata-se de uma equação de variáveis separáveis, cuja solução geral é dada na forma implícita por

$$\int e^y dy = \int (2x-4)dx \Leftrightarrow e^y = x^2 - 4x + C.$$

Para apresentar a solução na forma explícita devemos escrever y como função de x. Ora,

$$e^y = x^2 - 4x + C \Leftrightarrow y = \log(x^2 - 4x + C).$$

Assim, a solução geral pedida é $y(x) = \log(x^2 - 4x + C)$. A solução apenas está bem definida se $x^2 - 4x + C > 0$, sendo que o valor de C depende da condição inicial considerada.

3. Considere $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ e calcule $\iint_\Omega xydxdy$. (20)

Solução:

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Omega} xy\,dxdy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dydx = \int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(1-x^2\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

4. Semanalmente, um indivíduo trabalha L horas e consome uma quantidade X de determinado bem, obtendo um nível de satisfação dado por

$$S(X,L) = X^2(35-L)^2.$$

(a) Determine e classifique todos os pontos críticos de S em $\mathbb{R}^2$. (20)

Solução:

Os pontos críticos de S são as soluções do sistema

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial X} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X(35-L)^2 = 0 \\ -2X^2(35-L) = 0 \end{cases},
$$

que são todos os pontos de forma $\{(X_*, L_*) : X_* = 0 \vee L_* = 35\}$. Como $S \geq 0$ e $S(X_*, L_*) = 0$, concluímos imediatamente que todos estes pontos críticos são minimizantes absolutos de S.

(b) O orçamento disponível para a compra do bem depende do número de horas semanais de trabalho, através da restrição orçamental $X = 4L$. Considere o conjunto $\Omega = \{(X,L) \in \mathbb{R}^2 : X \geq 0, 0 \leq L \leq 35\}$ e determine o par $(X,L) \in \Omega$ que permite maximizar a satisfação, considerada a restrição orçamental. (20)

Solução:

Como S é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e a matriz Jacobiana do conjunto das restrições de igualdade é $J = [1 \quad -4]$, que tem característica máxima, sabemos que qualquer extremante local de S em $\mathbb{R}^2$, sujeito à restrição orçamental, será ponto crítico da função Lagrangiana $\mathcal{L}(X,L;\lambda) = S(X,L) - \lambda(X-4L)$. Ora, os pontos críticos de $\mathcal{L}$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 2X(35-L)^2-\lambda=0 \\ -2X^2(35-L)+4\lambda=0 \\ X=4L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=2X(35-L)^2 \\ -2X^2(35-L)+4\cdot 2X(35-L)^2=0 \\ X-4L=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda=2X(35-L)^2 \\ -2X(35-L)\left(X-4\cdot(35-L)\right)=0 \\ X-4L=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=2X(35-L)^2 \\ X(35-L)(8L-140)=0 \\ X-4L=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda=0 \\ X=0 \\ L=0 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda=0 \\ L=35 \\ X=140 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda=35^3 \\ L=\frac{35}{2} \\ X=70 \end{cases}$$

Como o conjunto $M=\{(X,L)\in\Omega : X=4L\}$ é compacto e S é contínua em M, o teorema de Weierstrass garante a existência de máximo e mínimo globais de S em M. Os pontos $(0,0)$ e $(70,35)$ são minimizantes globais de S em $\mathbb{R}^2$, pelo que o máximo procurado irá ocorrer precisamente no ponto $(70,\frac{35}{2})$.

Matemática 2

Lic. em Economia, Gestão e Finanças

Data: 4 de Julho de 2017 **Duração:** 1H

Repetição do Teste Intercalar

Atenção: Deve justificar detalhadamente todas as suas respostas.

1. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. (25)

Calcule todos os valores próprios de A, determine os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 2$ e classifique a forma quadrática $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$.

Solução:

O polinómio característico de A é dado por

$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) - (2-\lambda) = (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 2).$

Os valores próprios de A, são as raízes de $p(\lambda)$, isto é, as soluções da equação

$$(2-\lambda)(2-\lambda-\sqrt{2})(2-\lambda+\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Os valores próprios de A são então $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$ e $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$. Os vetores próprios associados a $\lambda_1 = 2$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo

$$A\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + u_2 = 2u_1 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 = 2u_2 \\ u_2 + 2u_3 = 2u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 0 \\ u_3 = -u_1 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

isto é, são os vetores da forma $t(1, 0, -1), \quad t \neq 0$.

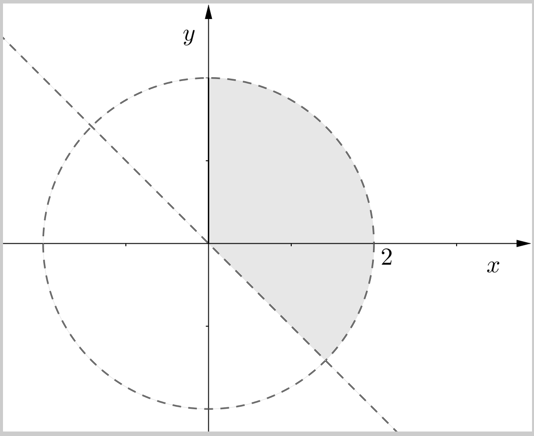
Relativamente à forma quadrática representada pela matriz simétrica A, uma vez que todos os valores próprios de A são positivos, esta é definida positiva.

2. Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}\ln(x+y)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

(a) Determine analiticamente o domínio da função f, D_f, e represente-o graficamente. (15)

Solução:

$$\begin{aligned} D_f =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, x+y>0,\, 4-x^2-y^2>0\} \\ =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, y>-x,\, x^2+y^2<4\} \end{aligned}$$



(b) Determine analiticamente o interior e a fronteira de D_f e averigue se o conjunto é limitado. (15)

Solução:

$$\begin{aligned} \mathrm{Int}D_f =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0,\, y>-x,\, x^2+y^4<4\} \\ \mathrm{Fr}D_f =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0, 0 \leq y \leq 2\} \cup \\ &\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4, x \geq 0, y \geq -x\} \cup \\ &\{(x,y) : x \geq 0, y=-x, x^2+y^2 \leq 4\} \end{aligned}$$

Podemos facilmente observar que o conjunto está contido na bola $B_2(0,0)$, pelo que é limitado.

3. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por (30)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy, & y \geq x^2 \\ \dfrac{x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y < x^2 \end{cases}$$

é contínua no ponto $(0,0)$.

Solução:

A função f é continua em $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Como o ponto $(0,0)$ não se encontra no interior de nenhum dos ramos de definição de f, começamos por definir os conjuntos

$$\begin{aligned} B_1 =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\} \\ B_2 =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}. \end{aligned}$$

Como estes dois conjuntos são disjuntos, $B_1 \cup B_2 = D_f$ e o ponto $(0,0)$ é aderente a qualquer dos conjuntos, a função será contínua em $(0,0)$ se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B_2}} f(x,y) = 0.$$

Ora, como $f(x,y) = xy$ em B_1, não existe qualquer indeterminação no cálculo de $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B_1}} f(x,y)$, que é efetivamente zero. Relativamente ao limite segundo o conjunto B_2, basta notar que

$$\begin{aligned} \left|\frac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{|x||\sin y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq & \frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot|\sin y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \leq & |\sin y| \longrightarrow 0 (\text{quando } (x,y) \to (0,0)), \end{aligned}$$

para concluir que também se tem $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B2}} f(x,y) = 0$, o que permite por fim mostrar que f é contínua no ponto $(0,0)$.

4. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável e tal que a sua derivada segundo o vetor $(2,-2,0)$, no ponto $(1,1,1)$, é igual a 2. Considere ainda uma função $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $h(x,y) = g(x+y, x-y, x^2)$. Determine $\dfrac{\partial h}{\partial y}(1,0)$. (15)

Solução:

Como é dito que g é diferenciável em $\mathbb{R}^3$, sabemos que a sua derivada direcional é pode ser calculada como

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{a}}(1,1,1) = \frac{\partial g}{\partial u}(1,1,1) \cdot a_1 + \frac{\partial g}{\partial v}(1,1,1) \cdot a_2 + \frac{\partial g}{\partial w}(1,1,1) \cdot a_3.$$

Assim, sabendo que quando $\boldsymbol{a} = (2,-2,0)$ a derivada direcional no ponto $(1,1,1)$ tem o valor 2, vemos que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(1,1,1) - \frac{\partial g}{\partial v}(1,1,1) = 1.$$

Por outro lado, sendo g, h diferenciáveis e estanto bem definida a sua composta, podemos usar a regra da cadeia

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=-1} + \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}}_{=0} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}$$

Em particular,

$$\frac{\partial h}{\partial y}(1,0) = \frac{\partial g}{\partial u}(1,1,1) - \frac{\partial g}{\partial v}(1,1,1) = 1.$$