Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática II – 1º ano MAEG

2º Semestre 2008/2009

EXAME FINAL 3 Junho 2009

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Para cada $x \in \mathbb{R}$ considere a série

$$S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(x-1)^2}{n^2(x^2+n^2)}.$$

(a) Determine o domínio de S e mostre que é uma função contínua.

(b) Prove que é uma função diferenciável e calcule S'.

(2) Calcule

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} \quad \text{e} \quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}}$$

(3) Seja $f\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t).$$

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Calcule a derivada de f e de $g \circ f$ em π, onde

$$g(x,y) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + xy\right), \cos\left(\frac{\pi}{2} + xy\right)\right).$$

(4) Considere
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy-1}}.$$

(a) Indique o domínio de f e os pontos onde é contínua. Consegue prolongar f por continuidade a algum ponto fronteiro ao seu domínio?

(b) Determine o contradomínio de f.

(5) Considere a função $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$g(x,y) = \left(e^{-xy^2}, \sin(x+y)\right).$$

(a) Determine o domínio de diferenciabilidade e a matriz jacobiana de g.

(b) Mostre que $D_v g(0,\pi) \neq (0,0)$ para qualquer vector $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(6) Seja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Sabendo que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos
$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1+n^2}{n^2},$$
determine
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$
Sugestão: Utilize a definição de derivada parcial num ponto.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática II – 1º ano MAEG

2º Semestre 2008/2009

EXAME FINAL 25 Junho 2009

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Calcule

(a)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}\frac{nx^2}{1+n|x|}\,dx$$

(b)

$$\int_0^1\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+x)^2}\,dx$$

(c)

$$\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{3^n(n+1)n}.$$

(2) Seja $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & \|(x,y)\|\leq 1\\ \sqrt[4]{x^2+y^2}, & \|(x,y)\|>1.\end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Determine os domínios de continuidade e de diferenciabilidade de f.

(c) Calcule a derivada de f.

(3) Determine e classifique os extremos de $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=xye^{x-y}.$$

(4) Seja $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ tal que em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é dada por

$$f(x,y) = \frac{\sin^4\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}.$$

(a) Determine $f(0,0)$ e, se possível, a derivada de f em $(0,0)$ segundo o vector $(1,1)$.

(b) Mostre que $\nabla f(x,y)$ é ortogonal ao vector $(y,-x)$ em qualquer ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(5) Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(tx) = |t|\, f(x)$ com $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Mostre que se f é diferenciável na origem, então $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$.