**Instituto Superior de Economia e Gestão**
**Análise Matemática II**
**Licenciatura em MAEG**
**Época Normal: 20 de Junho de 2006**
**Duração: 2 horas**

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(2,5) 1. Determine a área da figura plana limitada pelo gráfico da função $f(x) = \dfrac{cos(x)}{\sqrt{1 + sen(x)}}$, pelo eixo das abcissas e pelas rectas de equação $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{6}$.

(2,5) 2. Considere a sucessão de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{nx^4 + 2n}.$$

Diga, justificando, se a sucessão $(f_n)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

(2,5) 3. Desenvolva em série de potências de $(x + 1)$ a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, indicando o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento é válido.

(2,5) 4. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \sqrt{(x - 2)(16 - x^2 - y^2)}.$$

(a) Determine o domínio de $f$, $D_f$, e represente-o geometricamente.

(b) Indique, justificando, se $D_f$ é um conjunto aberto ou fechado.

(4,0) 5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y - x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de $f$.

(b) Calcule o gradiente de $f$ no ponto $(0, 0)$.

(c) Estude a diferenciabilidade de $f$ no ponto $(0, 0)$.

(4,0) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 5y.$$

(a) Determine os extremantes relativos de $f$, indicando se são maximizantes ou minimizantes.

(b) Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (cos(x), e^{x+y})$. Determine a matriz jacobiana de $f \circ g$ no ponto $(\pi, -\pi)$.

(2,0) 7. Seja $a > 0$. Considere o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{2x^2 + bx + a}{x(x + a)} - 2 \right| dx.$$

Determine a relação entre $a$ e $b$ de forma a que o integral seja convergente.

**Instituto Superior de Economia e Gestão**
**Análise Matemática II**
**Licenciatura em MAEG**
**Época de Recurso: 30 de Junho de 2006**
**Duração: 2 horas**

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(2,5) 1. Determine a área da figura plana limitada pelos gráficos das funções $f(x) = \log(x)$, $g(x) = -\log(x)$ e pelas rectas de equação $x = \frac{1}{e}$ e $x = e$.

(2,5) 2. Estude, em função do parâmetro $\alpha$ a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^\alpha}{\sqrt{x}(x^2+1)} dx.$$

(2,5) 3. Desenvolva em série de potências de $(x-1)$ a função $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$, indicando o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento é válido.

(2,5) 4. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(1 - sen(x))(y - x^2)}}{\log(x + y - 2)}.$$

(a) Determine o domínio de $f$, $D_f$, e represente-o geometricamente.

(b) Defina analiticamente a fronteira de $D_f$ e indique, justificando, se $D_f$ é um conjunto aberto ou fechado.

(4,0) 5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x^3 + 2(y-1)^2 - x^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,1) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de $f$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) Indique segundo que vectores $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ existe a derivada $f'_{\overrightarrow{v}}(0,1)$ e, nos casos em que exista, calcule-a.

(c) Estude a diferenciabilidade de $f$ no ponto $(0,1)$.

(3,0) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x,y) = e^{xy + xy^2 + x^2}.$$

Determine os pontos críticos de $f$ e classifique-os.

(3,0) 7. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe $C^2$ e seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(x,y) = f(xy) - g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Mostre que, no domínio em que está definida, se tem

$$y^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = x \frac{\partial h}{\partial x} - y \frac{\partial h}{\partial y}.$$

**Instituto Superior de Economia e Gestão**
**Análise Matemática II**
**Licenciatura em MAEG**
**Época Normal: 17 de Janeiro de 2007**
**Duração: 2 horas**

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(2,5) 1. Desenvolva em série de potências de $(x+2)$ a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, indicando o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento é válido.

(2,5) 2. Indique, justificando, se a sucessão de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \dfrac{n^2 \sin(x) + 1}{n^2 \sin(x) + 2n^2}$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

(2,5) 3. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \sqrt{(ln(x^2+y^2))\left(\frac{1}{2} - y\right)}.$$

(a) Determine o domínio de $f$, $D_f$, e represente-o geometricamente.

(b) Indique, justificando, se $D_f$ é um conjunto aberto ou fechado.

(5,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e $f'_{(1,2)}(0,0)$.

(b) Estude, utilizando a definição, a diferenciabilidade de $f$ no ponto $(0,0)$.

(c) Poderia ter obtido o resultado da alínea anterior a partir do resultado obtido na alínea (a)? Justifique.

(2,5) 5. Seja $f$ uma função real de variável real diferenciável e considere a função $h : D_h \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = x.y + xf\left(\frac{y}{x}\right)$, para todo $x \neq 0$. Prove que

$$x\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = xy + h(x,y),$$

para todo $x \neq 0$.

(2,5) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x,y) = xye^{x-y}.$$

Determine os extremantes de $f$, indicando se são maximizantes ou minimizantes.

(2,5) 7. Sejam $a_n$ e $b_n$ duas sucessões de termos positivos tais que a série $\sum a_n$ e a série $\sum(b_n - b_{n+1})$ são convergentes. Mostre que a série $\sum(a_n b_n)$ é também uma série convergente.

**Instituto Superior de Economia e Gestão**
**Análise Matemática II**
**Licenciatura em MAEG**
**Época de Recurso: 1 de Fevereiro de 2007**
**Duração: 2 horas**

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(2,5) 1. Considere a seguinte série de potências: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.

a) Estude a convergência da série indicando para que valores de $x$ a série é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

b) Calcule a soma da série dentro do intervalo de convergência.

(2,5) 2. Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sucessão de funções definida por $f_n(x) = \dfrac{2n+3n^2}{x^2n^2+2n^2}$. Indique, justificando, se $f_n$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

(4,0) 3. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x(2-\sin(x))}{1-|y|}}.$$

(a) Determine o domínio de $f$, $D_f$, e represente-o geometricamente.

(b) Defina, analiticamente, a fronteira de $D_f$ e indique, justificando, se $D_f$ é um conjunto aberto ou fechado.

(c) Indique, justificando, se $f$ é prolongável por continuidade ao ponto $(0,1)$.

(3,5) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+xy\cos(xy)\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcule o gradiente de $f$ no ponto $(0,0)$.

(b) Estude a diferenciabilidade de $f$ no ponto $(0,0)$.

(2,5) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y,z) = f\left(x^2-y^2, y^2-z^2\right)$. Prove que

$$yz\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + xz\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) + xy\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0,$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(2,5) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x,y) = x + y\sin(x).$$

Determine os pontos críticos de $f$, indicando se são extremantes ou pontos de sela.

(2,5) 7. Seja $a_n$ uma sucessão tal que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Prove que a série $\sum a_n^2$ também é absolutamente convergente. Dê um exemplo que mostre que o recíproco não é verdadeiro.

**Instituto Superior de Economia e Gestão**
**Análise Matemática II**
**Licenciatura em MAEG**
**Época Especial: 19 de Março de 2007**
**Duração: 2 horas**

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(2,5) 1. Considere a seguinte série de potências: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)}(x-1)^{n+1}$.

(a) Estude a convergência da série indicando para que valores de $x$ a série é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

(b) Calcule a soma da série no respectivo intervalo de convergência.

(2,5) 2. Sendo $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ a sucessão de funções definida por $f_n(x) = \frac{1}{(3x)^n+1}$, indique, justificando, se a sucessão $(f_n)$ converge uniformemente nos seguintes intervalos: $[0,3]$ e $[1,4]$.

(2,5) 3. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{(y-x^2)}{(1-|y|)(2-\sin(x))}}.$$

Determine o domínio de $f$, $D_f$, represente-o geometricamente e indique, justificando, se $D_f$ é um conjunto aberto ou fechado.

(5,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(y-1)^3}{x^2+(y-1)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

(a) Calcule o gradiente de $f$ no ponto $(0,1)$.

(b) Seja $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $||\overrightarrow{v}|| = 1$. Calcule $f'_{\overrightarrow{v}}(0,1)$.

(c) Prove que a função não é diferenciável no ponto $(0,1)$,

i. aplicando a definição de diferenciabilidade num ponto;

ii. utilizando os resultados obtidos nas alíneas (a) e (b);

(2,5) 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = f'(1) = 2$ e $f(2) = f'(2) = 1$ e considere $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(x,y,z) = (f(x^2) + f(x^2+y^2), f(xyz))$. Calcule a matriz jacobiana de $g$ no ponto $(1,1,2)$.

(2,5) 6. Considere $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Determine, em função de $\alpha$, os pontos críticos da função $f$ definida por:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2-\alpha y^2+x}{1+z^2},$$

indicando, para cada um deles se é um maximizante, minimizante ou ponto de sela.

(2,5) 7. Sejam $a_n$ e $b_n$ duas sucessões de termos positivos, com $b_n \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que a série $\sum a_n$ é divergente e a série $\sum(b_n - b_{n+2})$ é convergente. Estude, quanto à convergência, a série $\sum(a_n b_n)$.

**Instituto Superior de Economia e Gestão**
**Análise Matemática II**
**Licenciatura em MAEG**
**2ºSemestre 2006/2007**
**Época Normal: 4 de Junho de 2007**
**Duração: 2 horas**

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(3,0) 1. Seja $a_n$ uma sucessão convergente de termos positivos tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{n^2 a_n}{2n^2+1}.$$

(a) Estude, quanto à convergência, a série $\sum a_n$.

(b) Prove que $\lim a_n = 0$ e indique, justificando, qual a natureza da série $\sum(e^{a_n} - 1)$.

(3,0) 2. Seja $f_n : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ a sucessão de funções definida por $f_n(x) = \dfrac{4^n}{x^n + 4^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Estude a convergência uniforme de $f_n$ nos seguintes intervalos:

a) $[3, 5]$; b) $[6, 10]$;

(4,0) 3. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função definida por:

$$f(x,y) = \frac{\log(1 - x^2 - y)}{\sqrt{y - x^2 + 1}}.$$

(a) Determine o domínio de $f$, $D_f$, e represente-o geometricamente.

(b) Dê um exemplo de uma sucessão de pontos pertencentes a $D_f$ que convirja para um ponto que não pertence a $D_f$.

(c) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação:

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n \backslash D_f : \lim x_n \in D_f.$$

(5,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(\cos(x) - \sin(y))}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de $f$.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

(c) Indique, justificando, se $f$ é diferenciável no ponto $(0,0)$.

(2,5) 5. Sendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(0, e, 0)$ tal que $\nabla_f(0, e, 0) = (e, -1, e)$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x, y) = f(\sin(xy^2), e^y, \log(1 + x^2))$ calcule $\nabla_g(0, 1)$ e verifique que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) = -\frac{\partial g}{\partial y}(0,1).$$

(2,5) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yf(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xf(x,y)$ e $f(0,0) = 1$. Prove que $(0,0)$ é um ponto crítico de $f$ mas não é um extremante da função.

**Instituto Superior de Economia e Gestão**
**Análise Matemática II**
**Licenciatura em MAEG**
**2ºSemestre 2006/2007**
**Época de Recurso: 25 de Junho de 2007**
**Duração: 2 horas**

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(3,0) 1. Considere a seguinte série de potências: $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{n-1}$.

a) Estude a convergência da série indicando para que valores de $x$ a série é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

b) Calcule a soma da série dentro do intervalo de convergência.

(2,5) 2. Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sucessão de funções definida por $f_n(x) = \dfrac{nx}{e^{nx}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, se a sucessão $f_n$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

(4,5) 3. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x-y^2}{\sin(x)-3}} \times \log(1-x^2-y^2).$$

(a) Determine o domínio de $f$, $D_f$, e represente-o geometricamente.

(b) Defina, analiticamente, a fronteira de $D_f$ e indique, justificando, se $D_f$ é um conjunto aberto ou fechado.

(c) Indique, se possível uma sucessão de pontos de $D_f$ que convirja para um ponto que não pertence a $D_f$ e uma sucessão de pontos que não pertencem a $D_f$ que convirja para um ponto de $D_f$.

(5,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-1)^2 \sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right) + y^2 & \text{se } x \neq 1 \\ y^2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de $f$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ indicando o seu domínio.

(c) Indique, justificando, se $f$ é diferenciável no ponto $(1,0)$.

(2,5) 5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe $C^2$ em $\mathbb{R}$. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = f\left(x + g(y)\right)$. Prove que

$$\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

(2,5) 6. Para cada par $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ com $a, b \neq 0$, considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + xy.$$

(a) Determine os pontos críticos de $f$.

(b) Indique, justificando, se são maximizantes, minimizantes ou pontos de sela no caso em que $ab > 0$ e no caso em que $ab < 0$.

**Instituto Superior de Economia e Gestão**
**Análise Matemática II**
**Licenciatura em MAEG**
**1ºSemestre 2007/2008**
**Época Normal: 16 de Janeiro de 2008**
**Duração: 2 horas**

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(3,0) 1. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de termos positivos tais que a série de termo geral $a_n$ é convergente e a sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

a) $\sum \frac{a_n}{1+b_n}$; b) $\sum \frac{b_n}{1+a_n}$;

(3,0) 2. Seja $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ a sucessão de funções definida por $f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 6^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Estude a convergência uniforme de $f_n$ nos seguintes intervalos:

a) $[7, 10]$; b) $[3, 10]$;

(4,0) 3. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por:

$$f(x,y) = \left(\frac{e^{\sin(x)}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{\ln(y^2-x)}{x+2y}\right).$$

(a) Determine o domínio de $f$, $D_f$, e represente-o geometricamente.

(b) Defina, analiticamente, a fronteira de $D_f$ e indique, justificando, se $D_f$ é um conjunto aberto ou fechado.

(c) Dê um exemplo, ou prove que não existe, uma sucessão de pontos pertencentes a $D_f$ que convirja para um ponto que não pertence a $D_f$.

(5,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) + (y+3)^3 & \text{se } x \neq 1 \\ (y+3)^3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de $f$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ indicando o seu domínio.

(c) Indique, justificando, se $f$ é diferenciável no ponto $(1, -3)$.

(3,0) 5. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(-1,1) = -1$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função tal que $g(x,y) = f(f(x,y), f^2(x,y))$.

(a) Calcule, em função das derivadas parciais de $f$ o gradiente de $g$.

(b) Prove que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(-1,1) + 2\frac{\partial g}{\partial y}(-1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)\right)^2 - 4\left(\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right)^2.$$

(2,0) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = xy(1-x-y).$$

Determine os pontos de estacionaridade de $f$ e escolha dois dos pontos encontrados para determinar se se tratam de extremantes ou pontos de sela.

**Instituto Superior de Economia e Gestão**
**Análise Matemática II**
**Licenciatura em MAEG**
**1ºSemestre 2007/2008**
**Época de Recurso: 31 de Janeiro de 2008**
**Duração: 2 horas**

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,0) 1. Estude, quanto à convergência as seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(n^2+3)+n\sqrt{n^3+1}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $a_{n+1} = \dfrac{3na_n}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3,0) 2. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3}{2x-5}$.

(a) Desenvolva $f$ em série de potências de $(x-3)$, indicando o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento é válido.

(b) Indique, justificando, o valor de $f^{(31)}(3)$.

(3,0) 3. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função definida por:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(|x|-2)(9-x^2-(y-1)^2)}}.$$

(a) Determine o domínio de $f$, $D_f$, e represente-o geometricamente.

(b) Dê um exemplo, caso exista, de uma sucessão de pontos pertencentes a $D_f$ que convirja para um ponto que não pertence a $D_f$ e indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação:

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n \backslash D_f : \lim x_n \in D_f.$$

(4,5) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (y-3)^2 \cos\left(\dfrac{1}{y-3}\right) + (x-1)^2 y & \text{se } y \neq 3 \\ k(x-1)^2 & \text{se } y = 3 \end{cases}$$

(a) Determine o valor de $k$ de forma a que a função $f$ seja contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule a função $\frac{\partial f}{\partial x}$ e indique o seu domínio.

(c) Para o valor de $k$ encontrado na alínea ($a$) indique, justificando, se $f$ é diferenciável no ponto $(1,3)$.

(3,0) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função de classe $C^1$ e considere $g$ definida, a partir de $f$, por $g(x,y) = f(x^2+y^2, x/y)$.

(a) Calcule, em função das derivadas parciais de $f$, o gradiente de $g$.

(b) Mostre que, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y \neq 0$, existe $g'_{(x,y)}(x,y)$ e o seu valor é

$$g'_{(x,y)}(x,y) = 2(x^2+y^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y^2, x/y).$$

(2,5) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = x^2 y(6-x-y).$$

Determine os pontos de estacionaridade de $f$ e escolha dois dos pontos encontrados para determinar se se tratam de extremantes ou pontos de sela.

# Análise Matemática II

## SOLUÇÕES EXAMES

**20 Jun 2006**

1. $2\sqrt{3/2}-2$

2. conv unif

3. $\sum_{n\geq 1} n(x+1)^{n-1}$, $]-2,0[$

4a.

4b. fechado

5a. cont em $\mathbb{R}^2$

5b. $(-1,0)$

5c. não dif

6a. $(5,25/2)$ min, $(1,1/2)$ pto sela

6b. [13 13]

7. $b=2a$

**30 Jun 2006**

1. $4(1-1/e)$

2. conv sse $\alpha<3/2$

3. $\sum_{n\geq 0}(-1/2^{n+1}+1)(x-1)^n$, $]0,2[$

4a.

4b. nem aberto nem fechado

5a. cont em $\mathbb{R}^2$

5b. $(-v_1^3-v_1^2v_2)/(v_1^2+v_2^2)$, $v\neq(0,0)$

5c. nao dif

6. $(0,0),(0,-1)$ ptos sela, $(1/8,-1/2)$ min

7.

**17 Jan 2007**

1. $\sum_{n\geq 1} n/2^{n+1}(x+2)^{n-1}$, $]-4,0[$

2. conv unif

3a.

3b. fechado

4a. $1,0,-3/5$

4b. nao dif

4c. sim

5.

6. $(0,0)$ pto sela, $(-1,1)$ min

7.

**1 Fev 2007**

1a. $|x|<1$ abs conv, o.c. div

1b. $x/(1-x)^2$

2. conv unif

3a.

3b. nem aberto nem fechado

3c. nao

4a. $(0,0)$

4b. dif

5.

6. $(2k\pi,-1),(2k\pi+\pi,1)$ ptos sela

7.

**4 Jun 2007**

1a. conv

1b. conv

2a. não unif conv

2b. unif conv

3a.

3b. $(1-1/n,0)$

3c. F

4a. cont em $\mathbb{R}^2$

4b. 0,0

4c. não dif

5. $(e,-e)$

6.

**25 Jun 2007**

1a. $]-1,1[$ abs conv, o.c. div

1b. $(2-x)/(1-x)^2$

2. não conv unif

3a.

3b. nem aberto nem fechado

3c. $(0,1-1/n)$

4a. cont em $\mathbb{R}^2$

4b. $\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}2(x-1)\sin(1/(x-1))-\cos(1/(x-1)), & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}, \frac{\partial f}{\partial y}=2y$

4c. dif

5.

6a. $(\sqrt[3]{a^2/b},\sqrt[3]{b^2/a})$

6b. max se $ab<0$, min se $ab>0$

**16 Jan 2008**

1a. conv

1b. div

2a. conv unif

2b. não conv unif

3a.

3b. aberto

3c. $(0, 2 - 1/n)$

4a. cont em $\mathbb{R}^2$

4b. $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2(x-1)\sin(1/(x-1)) - \cos(1/(x-1)), & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$,
$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(y+3)^2$

4c. dif

5a.

5b.

6. $(0,0), (1,0)$ ptos sela, $(0,1), (1/3, 1/3)$ max