Matemática I – 2º Semestre 2009/10
Ficha de exercícios

Semanas 2 e 3: Cap. 2 – Matrizes

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 15.2: Exercícios 1, 2 e 4;
Secção 15.3: Exercícios 1, 3 e 4;
Secção 15.4: Exercícios 1, 2 e 4;
Secção 15.5: Exercícios 1 a 4.

1.2. Indique um exemplo de uma matriz diagonal D e de um vector $\vec{v}$ de igual dimensão, e calcule $D\vec{v}$.

1.3. Indique um exemplo de uma matriz triangular superior S e calcule a sua transposta S'.

1.4. Indique dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de igual dimensão, e uma combinação linear dos dois vectores.

1.5. Determine a característica das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2 Definições e Demonstrações

2.1. Sejam as matrizes A e B de dimensões $k \times p$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Demonstre que:
a) $A + B = B + A$ b) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ c) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

2.2. Seja I a matriz identidade de dimensão n e seja $k \in \mathbb{N}$. Prove que $I^k = I$.

2.3. Sejam a matriz A de dimensões $k \times p$, a matriz B de dimensões $p \times \ell$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Demonstre:
a) $(\lambda A)' = \lambda A'$ b) $(AB)' = B'A'$.

2.4. Seja uma matriz A de dimensões $m \times n$. Mostre que no caso $n = 1$, $A'A = 0 \Rightarrow A = \mathbf{0}$.

2.5. Sejam A e B matrizes permutáveis ($AB = BA$) e C uma matriz tal que $C = 3A^2 - 5A - I$, onde I designa a matriz identidade. Mostre que as matrizes C e B são permutáveis.

3 Problemas e Modelização

3.1. Seja a matriz $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{-}\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ e o vector $\vec{e_x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
a) Represente o círculo trigonométrico e indique os valores de $\sin\theta$ e de $\cos\theta$ para os ângulos $\theta = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.
b) Calcule $R(\theta)\vec{e_x}$ e represente geometricamente o respectivo resultado, mostrando que $R(\theta)$ representa a rotação do vector $\vec{e_x}$ por um ângulo θ em torno da origem.
c) Verifique que $[R(\theta)]^2 = R(2\theta)$ usando as identidades trigonométricas: $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, e $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.
d) Interprete geometricamente o resultado anterior.

3.2. Três empresas obtiveram os seguintes resultados líquidos (em milhões de euros) em 2008:

Empresa	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
Empresa 1	5	2	-1	2
Empresa 2	2	8	0	5
Empresa 3	1	3	-1	2

tendo em seguida obtido os seguintes resultados em 2009:

Empresa	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
Empresa 1	2	7	3	5
Empresa 2	4	4	6	6
Empresa 3	-1	-1	-1	0

a) Determine, para cada empresa, em cada trimestre, a diferença de resultados entre 2009 e 2008.
b) Determine, para cada empresa, em cada trimestre, o resultado médio dos dois anos.

3.3. Seja o conjunto de vectores $\{(1,0,0),(0,1,0),(-4,2,-8)\}$.
a) Determine através da definição se se trata de um conjunto de vectores linearmente independentes.
b) Defina característica de uma matriz e determine o resultado da alínea anterior através do estudo de uma característica.

4 Exercícios adicionais

4.1. Determine a característica das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 15.2: Exercício 3;
Secção 15.3: Exercícios 2 e 5;
Secção 15.4: Exercícios 3, 6 e 7;
Secção 15.5: Exercícios 5 e 7.