Análise Matemática II

LISTA 1 [1]

(1) Ler capítulos II.2.1 e II.2.2 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*.

(2) Calcule a soma das seguintes séries:

(a) $\sum_{n\geq 1} 2^{-n}$

(b) $\sum_{n\geq 1} 3^{-(5n+1)}$

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+k)}$, $k \in \mathbb{N}$

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

(e) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+3)(n+6)}$

(3) (Séries de Mengoli) Prove que se $\lim a_n$ existe e é finito, então a série

$$\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n+k})$$

é convergente e a sua soma é $a_1 + a_2 + \ldots + a_k - k \times \lim a_n$.

(4) Sendo a_n uma sucessão real tal que $a_n \to +\infty$, indique, justificando, a natureza da série

$$\sum \frac{a_n}{1+a_n}.$$

(5) Utilizando o critério de comparação ou um dos seus corolários, estude a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1+(-1)^n}{n^2}$

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

(c) $\sum_{n\geq 1} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}}$

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{n\sqrt{n+1}}{(n+1)^3\sqrt[3]{n^2+n}}$

(e) $\sum_{n\geq 1}(n-\sqrt{n^2-1})$

[1] Comentários e/ou correcções para jldias@iseg.utl.pt. As questões mais difíceis encontram-se marcadas com *.

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\log(n)}{n^3}$

(6) Utilize o critério do integral (ver Teorema 4 – V.3.1) para decidir sobre a convergência da série:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\log(n)}.$$

(7) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes de termos positivos. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)$.

(b) $\displaystyle\sum \frac{n+1}{n} a_n$.

(8) Estude, quanto à natureza, a série de termo geral $\dfrac{a^n}{1+b^n}$ nos seguintes casos:

(a) $0 < a < b$

(b) $0 < b \leq a < 1$

(c) $1 \leq b \leq a$.

(9) Sejam a_n e b_n duas sucessões de termos positivos tais que as séries $\sum a_n$ e $\sum(b_n - b_{n+1})$ são convergentes. Mostre que $\sum(a_n b_n)$ é também uma série convergente.

(10) (a) *Mostre que a sucessão

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é crescente. *Sugestão*: Use o binómio de Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$ com $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(b) Para cada valor de $c > 0$, estude a convergência da série

$$\sum \frac{c^n n!}{n^n}.$$

Sugestão: Use a alínea anterior para estudar o caso $c = e$ pelo critério da razão.