Análise Matemática II

LISTA 5

(1) Considere a função $f(x) = e^x$.
  (a) Calcule a sua série de Taylor S_f em 0 e prove que f é analítica em $\mathbb{R}$.
  (b) Aproveite o resultado anterior para mostrar que
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

(2) Desenvolva em série de potências $\sum a_n(x-x_0)^n$ as seguintes funções, indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido:
  (a) $f(x) = \log(3-x)$, $x_0 = 1$.
  (b) $f(x) = x^{-2}$, $x_0 = -1$.
  (c) $f(x) = x^2 \log x^2$, $x_0 = 1$.

(3) Considere a série de potências $S(x) = \sum_{n\geq 1}(2n+1)x^{2n}$.
  (a) Mostre que é convergente no intervalo $]-1,1[$.
  (b) Prove que $S(0)$ é um mínimo relativo de S.
  (c) Calcule S.

(4) Mostre que a série de funções
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n-1}}\right)$$
converge em $[0,1]$ pontualmente mas não uniformemente.

(5) Escreva o desenvolvimento de Taylor em 0 das seguintes funções:
  (a) $f(x) = a^x$, $a > 0$
  (b) $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$
  (c) $f(x) = \arctan(x)$

(6) Seja $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \frac{4}{3x}.$$
  (a) Desenvolva f em série de potências de $(x-2)$, indicando o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento é válido.
  (b) Determine $f^{(17)}(2)$.

(7) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ considere
$$f(x) = (1+x)^\alpha.$$

(a) Determine a sua série de Taylor S_f no ponto 0.
(b) Indique o intervalo de convergência de S_f.
(c) Prove que f é analítica em $]-1,1[$.
Sugestão: Mostre que $S_f = f$ estudando a derivada da função $\varphi(x) = S_f(x)/f(x)$.

(8) Ler capítulo 2 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise em* $\mathbb{R}^n$.

(9) Represente geometricamente os seguintes conjuntos e indique o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de cada:
(a) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = \dfrac{n}{2n+1},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq y + x \leq 1\}$
(b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y \in \mathbb{Q}\}$

(10) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções, represente-o geometricamente e decida se é um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.
(a) $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \left(\dfrac{1}{1 - \log(x^2+y^2)}, \sqrt{x-y}\right)$
(b) $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \dfrac{\sqrt{(2-\sin x)(y-x^2)}}{\log(x+y-2)}$
(c) $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \log(xy)\sqrt{1 - x^2 - (y-1)^2}$