Análise Matemática II

LISTA 4

(1) * Dê exemplo de uma sucessão de funções descontínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}$, uniformemente convergente para uma função contínua em $\mathbb{R}$.

(2) Calcule

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^2 e^{-nx^2}\,dx$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} t^n e^{-t}\,dt$

(3) Ler capítulos II.2.4 e IV.2.1 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*.

(4) Para cada $x \in \mathbb{R}$ considere a série

$$S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(x-1)^2}{n^2(x^2+n^2)}.$$

(a) Determine o domínio de S e mostre que é uma função contínua.

(b) Prove que é uma função diferenciável e calcule S'.

(5) Calcule

$$\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+x)^2}\,dx.$$

(6) Para cada $x \in]0,1[$ considere o integral

$$I(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{onde} \quad f(t) = \frac{1}{(2-t)\sqrt{t}}.$$

(a) Mostre que a série

$$S(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^{n-1/2}}{2^{n+1}}$$

é uniformemente convergente em qualquer intervalo $[\epsilon, x]$ com $0 < \epsilon \leq x < 1$, e que $S(t) = f(t)$.

(b) Prove que

$$I(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)2^n}.$$

Sugestão: Note que $I(x) = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^x f$.

(7) Seja
$$S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

(a) Mostre que a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

(b) Dê exemplo de pontos onde a série das derivadas converge e diverge.

(c) Calcule $\int_0^1 S$.

(8) Mostre que se $r > 0$ é o raio de convergência da série de potências $\sum a_n(x - x_0)^n$ e $\alpha > 0$, então $\sum n^\alpha a_n(x - x_0)^n$ tem o mesmo raio de convergência.

(9) Calcule as somas das seguintes séries de potências nos respectivos intervalos de convergência:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{x^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n x^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^2 x^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n+1}(x-1)^{2n+1}$

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}(x-1)^{n+1}$