

## Análise Matemática III

### LISTA 8

- (1) Prove que qualquer intervalo e qualquer conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  com  $m(A) = 0$  são mensuráveis à Lebesgue.
- (2) (Conjunto de Cantor dos terços) Considere  $A_0 = [0, 1]$ . Divida-o em três partes iguais e retire o intervalo aberto do meio  $I_1 = ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ . Obtemos assim  $A_1 = I_0 \cup I_2$  onde  $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$  e  $I_2 = [\frac{2}{3}, 1]$ . Repita o processo para  $I_0$  e  $I_2$ , obtendo  $A_2 = I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$  onde  $I_{00} = [0, \frac{1}{9}]$ , etc. Continuando, temos uma sucessão de conjuntos  $A_n$ .
- (a) Prove que o chamado conjunto de Cantor dos terços  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  é não vazio.
- (b) Prove que  $A$  tem medida de Lebesgue nula.
- (c) \*Prove que  $A$  não é numerável.

*Sugestão:* Escreva  $x \in [0, 1]$  na base 3 na forma  $x = (0.a_1a_2\dots)_3$  onde

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k}$$

e  $a_k \in \{0, 1, 2\}$ . Note que  $x \in A$  sse  $a_k \in \{0, 2\}$  para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ .

- (3) Mostre que
- (a) se  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}$ , então  $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$ .
- (b)  $\sigma(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$  para qualquer  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ .
- (c)  $\mathcal{A} = \{[a, +\infty[ : a \in \mathbb{R}\}$  gera a  $\sigma$ -álgebra de Borel em  $\mathbb{R}$ .
- (4) Seja  $\Omega = \{0, 1\}^n \subset \mathbb{R}^n$ , i.e. os elementos de  $\Omega$  são vectores em  $\mathbb{R}^n$  com componentes 0 ou 1. Considere a medida  $\mu: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$  definida para cada  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$  por  $\mu(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n}$ .  
Dados  $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1\}$  com  $1 \leq m \leq n$ , definimos

$$A_{a_1, \dots, a_m} = \{\omega \in \Omega : \omega_i = a_i, i = 1, \dots, m\}$$

e  $\mathcal{A}_m = \{A_{a_1, \dots, a_m} : a_i \in \{0, 1\}\}$ .

- (a) Mostre que  $\mu$  é uma medida de probabilidade.
- (b) Calcule  $\mu(A_{a_1, \dots, a_m})$ .
- (c) Determine a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{A}_2$ .
- (d) Qual é o cardinal da  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{A}_m$ ?

- (5) Dê um exemplo em  $\mathbb{R}^2$  de um conjunto limitado de medida de Lebesgue nula cuja fronteira não tenha medida nula.
- (6) \* (Conjunto não mensurável à Lebesgue) Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , considere o conjunto  $A_\alpha = \alpha + \mathbb{Q}$ .
- Determine  $\cup_{\alpha \in \mathbb{R}} A_\alpha$  e  $m(A_\alpha)$ .
  - Mostre que  $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$  sse  $A_\alpha \neq A_\beta$  sse  $\alpha - \beta \notin \mathbb{Q}$ .
  - Considere o conjunto  $E \subset [0, 1]$  constituído por um único elemento  $a_\alpha$  de cada  $A_\alpha$  distinto<sup>1</sup>. Seja então  $E_n = (q_n + E) \cap [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $q_n$  representa uma sucessão que ordena os racionais.
    - Determine  $\cup_n E_n$ ,  $m(\cup_n E_n)$  e  $m(E_n) - m(E)$ .
    - Mostre que  $E_i \cap E_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ .  
*Sugestão:* Suponha que existe  $x \in E_i \cap E_j$ .
    - Calcule  $\sum_n m(E_n)$  e compare com  $m(\cup_n E_n)$ . Conclua que  $E$  não é mensurável à Lebesgue, i.e.  $E \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$ .
- (7) \*Mostre que  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  têm a mesma cardinalidade. *Sugestão:* Use o facto de o conjunto de Cantor dos terços (ver questão (2)) ter a mesma cardinalidade de  $\mathbb{R}$  e medida de Lebesgue nula.

---

<sup>1</sup>Este conjunto existe pela aplicação do axioma da escolha.