Análise Matemática III

LISTA 9

(1) Indique se, para uma função mensurável f, o conjunto de nível $f^{-1}(\{a\})$ é mensurável para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

(2) Considere a σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue em $\mathbb{R}$. Determine se qualquer função monótona $f\colon A \to \mathbb{R}$ com $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, é mensurável.

(3) Seja $X\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Esboce o gráfico da função $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = m\left(\{y \in [0,1]\colon X(y) \leq x\}\right).$$

(4) * Considere o espaço de medida de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e uma função $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ limitada e mensurável. Seja $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \mu\left(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \leq x\}\right),$$

Determine:

(a) a monotonia de F.
(b) se F é uma função mensurável.
(c) $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
(d) $\lim_{x\to-\infty} F(x)$.
(e) $\lim_{x\to a^+} F(x)$.
(f) $\lim_{x\to a^-} F(x)$.
(g) se $\mu(X^{-1}(\{a\})) = 0$ implica que F é contínua em a.

(5) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida onde μ é a medida de contagem. Seja $A = \{a_1, a_2, a_3\} \subset \Omega$ e $f \geq 0$ uma função mensurável.

(a) Decida se $\mathcal{X}_A\, f$ é uma função simples.
(b) Calcule $\int_A f\, d\mu$.

(6) Considere um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e uma função mensurável $f \geq 0$. Mostre que para $\lambda > 0$,

$$\mu\left(\{x \in \Omega\colon f(x) \geq \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda}\int_\Omega f\, d\mu.$$