Análise Matemática III

LISTA 1 [1]

(1) Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x-y).$$

Mostre pelo teorema da função implícita que numa vizinhança de $(1,1,0)$ o conjunto $F^{-1}(\{(2,0)\})$ é o gráfico de uma função $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

(2) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(0) \neq 0$, mas não é invertível numa vizinhança de 0. Explique porque é que este exemplo não contradiz o teorema da função inversa.

(3) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (u,v)$ onde

$$\begin{cases} u = x - y + \log(1+xy) \\ v = x + y - x^2y^2. \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(0,0)$ onde f tem inversa C^1 em torno de $f(0,0)$. Calcule $\frac{\partial x}{\partial v}(0,0)$.

(4) *Assumindo a validade do teorema da função inversa, demonstre o teorema da função implícita. *Sugestão*: Considere $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $F \in C^1(S, \mathbb{R}^m)$, $n > m$, $F(a,b) = 0$ com $a \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, e $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Aplique o teorema da função inversa a $H(x,y) = (x, F(x,y))$ de forma a resolver a equação $F(x,y) = 0$.

(5) Descreva parametricamente cada uma das seguintes curvas:
(a) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2/4 = 1\}$.
(b) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ z = 3\}$.
(c) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 1/2\}$.

(6) Dados $a, b > 0$, seja $\phi_{a,b}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ a função dada por

$$\phi_{a,b}(t) = (\sin(at), \sin(bt)).$$

[1] Comentários e/ou correcções para jldias@iseg.utl.pt. As questões mais difíceis encontram-se marcadas com *. A colaboração entre colegas é encorajada, mas cada estudante/grupo deve escrever as suas próprias soluções, compreendê-las e dar crédito aos seus colaboradores.

(a) Esboce o conjunto $\phi_{1,2}([0,2\pi])$ e indique se é uma variedade diferencial.
(b) * Esboce os conjuntos $\phi_{1,3}([0,2\pi])$ e $\phi_{2,3}([0,2\pi])$.
(c) Qual é a condição que se deve impôr a a e b para que $\phi_{a,b}(0) = \phi_{a,b}(2\pi)$.

(7) Descreva parametricamente e determine a dimensão de cada uma das seguintes variedades M e calcule o espaço tangente e o espaço normal em p:
(a) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 = 1,\ y > |x|,\ |z| < 2\}$, $p = (0,1,0)$.
(b) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (\sqrt{x^2+y^2} - 4)^2 + z^2 = 1\}$, $p = (4,0,1)$.
(c) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 3\}$, $p = (1,2,3)$.

(8) Recorde a definição das funções coseno hiperbólico e seno hiperbólico:
$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$
Mostre que $x = r\cosh t$, $y = r\sinh t$ define um sistema de coordenadas local.

(9) Considere uma escada encostada a uma parede na vertical. Marque um ponto p na escada localizado a $2/3$ do seu comprimento. Quando a escada escorrega no seu ponto de apoio, qual a curva descrita pelo ponto p?