Análise Matemática 3 D

Apontamentos de Análise Complexa

Filipe Oliveira, 2011

Conteúdo

1 Números complexos

1.1 Introdução: um pequeno cálculo histórico

Consideremos a equação polinomial do terceiro grau

$$x^3 = 15x + 4.$$

O método de Cardano-Tartaglia para a resolução de equações cúbicas consiste em procurar raízes sob a forma $x = u + v$:

$$\begin{aligned} x^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\ &= 3uv(u+v) + u^3 + v^3 \\ &= 3uvx + u^3 + v^3. \end{aligned}$$

Desta forma reduz-se o problema à condição suficiente

$$\begin{cases} 3uv = 15 \\ u^3 + v^3 = 4, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} v = \dfrac{5}{u} \qquad (u \neq 0) \\ \\ u^3 + \dfrac{125}{u^3} = 4. \end{cases}$$

Assim, podemos deduzir de uma eventual raíz do polinómio do segundo grau

$$P(X) = X^2 - 4X + 125 \qquad (X = u^3)$$

uma raíz da equação cúbica inicial.

Prosseguindo, obtemos

$$\begin{aligned} &(u^3)^2 - 4(u^3) + 125 = 0 \\ &(u^3 - 2)^2 = -121 \\ &(u^3 - 2)^2 = -11^2 \end{aligned}$$

pelo que este método não é aplicável, visto que esta equação não possui soluções. É a esta conclusão que chega Cardano na sua obra *Ars Magna*, publicada em 1545.

No entanto, cerca de vinte anos mais tarde, Rafael Bombelli levou os cálculos um pouco mais longe. Escreveu

$$\begin{aligned} u^3 - 2 &= 11\sqrt{-1} \\ u^3 &= 2 + 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

e visto que $v^3 + u^3 = 4$,

$$\begin{cases} u^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \\ v^3 = 2 - 11\sqrt{-1} \end{cases}$$

o que aparentemente não faz qualquer sentido.
Continuando,

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3\times 2(\sqrt{-1})^2 + 3\times 2^2\sqrt{-1} + (\sqrt{-1})^3 = 8 - 6 + 11\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = u^3.$$

Da mesma forma

$$(2-\sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1} = v^3,$$

pelo que

$$\begin{cases} u = 2 + \sqrt{-1} \\ v = 2 - \sqrt{-1} : \end{cases}$$

$$x = u + v = 4 + \sqrt{-1} - \sqrt{-1} = 4.$$

E de facto $x = 4$ é solução do problema inicial:

$$4^3 = 15 \times 4 + 4 \ .$$

Não é uma coincidência. Existe uma estrutura muito rica por detrás deste cálculo, estrutura essa que iremos formalizar correctamente nos próximos capítulos.

1.2 O corpo dos números complexos

Antes de definir o conjunto dos números complexos, vamos passar em revista algumas propriedades algébricas de $\mathbb{R}^2$.

A soma usual de dois elementos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

possui as seguintes propriedades:

1. A operação é interna: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2. A operação é associativa: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$,

$$((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)).$$

3. Existe um elemento neutro $\mathbf{0}$, isto é,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) + \mathbf{0} = \mathbf{0} + (x,y) = (x,y).$$

Basta escolher $\mathbf{0} = (0,0)$. Esta escolha é obviamente única. Chamamos a este elemento de $\mathbb{R}^2$ o **elemento nulo** ou, mais simplesmente o **zero** de $\mathbb{R}^2$.

4. Todos os elementos de $\mathbb{R}^2$ possuem um elemento simétrico, isto é,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exists (\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) + (\tilde{x},\tilde{y}) = (\tilde{x},\tilde{y}) + (x,y) = \mathbf{0}.$$

De facto, basta escolher $(\tilde{x},\tilde{y}) = (-x,-y)$, sendo esta a única escolha possível.

5. A operação é comutativa: $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_2,y_2) + (x_1,y_1).$$

Por verificar estas cinco propriedades, dizemos que $\mathbb{R}^2$ munido da soma usual, $(\mathbb{R}^2,+)$, é um **grupo comutativo**.

Por exemplo, $(\mathbb{N}_0,+)$ não é um grupo, uma vez que existem elementos que não possuem simétrico. Por outro lado, $(\mathbb{Z},+)$ ou $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+)$ são grupos comutativos.

Gostariamos agora de munir $\mathbb{R}^2$ de uma multiplicação. A ideia mais simples parece ser definir

$$(x_1,y_1) \times (x_2,y_2) = (x_1x_2, y_1y_2).$$

No entanto esta multiplicação não é muito interessante. Por exemplo, a "regra de anulamento do produto", que diz que um produto é nulo se e só se um dos factores for nulo, não é válida. De facto, observe-se que

$$(1,0) \times (0,1) = \mathbf{0}.$$

Diz-se que $(1,0)$ e $(0,1)$ são **divisores de zero**. A existência de tais elementos torna falsas um grande número de regras de cálculo muito naturais. Em particular, é um impedimento à existência de inversos multiplicativos para todos os elementos não nulos de $\mathbb{R}^2$.

Podemos definir em $\mathbb{R}^2$ uma multiplicação bem mais adequada, apesar de poder parecer, à primeira vista, um pouco bizarra:

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (x_1,y_1) \times (x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \tag{1.1}$$

A título de exemplo, verifiquemos que a regra de anulamento do produto é válida com esta multiplicação. Sejam dois elementos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$(x_1,y_1) \times (x_2,y_2) = \mathbf{0},$$

isto é,

$$x_1x_2 = y_1y_2 \wedge x_1y_2 = -x_2y_1.$$

Vamos supor que $(x_1, y_1) \neq \mathbf{0}$ e mostrar que então se tem obrigatoriamente $(x_2, y_2) = 0$.

- Se $x_1 \neq 0$, deduzimos da primeira equação que $x_2 = \dfrac{y_1y_2}{x_1}$, e substituindo na segunda igualdade vem $x_1^2y_2 = -y_1^2y_2$, ou seja $y_2(x_1^2 + y_1^2) = 0$. Assim, $y_2 = 0$. Da primeira equação retira-se então que $x_2 = 0$, ou seja $(x_2, y_2) = (0, 0) = \mathbf{0}$.

- Se $x_1 = 0$ tem-se $y_1 \neq 0$. Um raciocínio em tudo análogo ao do ponto anterior permite concluir uma vez mais que $(x_2, y_2) = \mathbf{0}$

Trata-se apenas de um exemplo. Na verdade, a multiplicação $\times$ goza de todas as propriedades que poderíamos esperar (deixamos as provas em exercício):

1. $\times$ é associativa: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1) \times ((x_2, y_2) \times (x_3, y_3)) = ((x_1, y_1) \times (x_2, y_2)) \times (x_3, y_3).$$

2. $\times$ é comutativa: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_2, y_2) \times (x_1, y_1).$$

3. $\times$ possui elemento neutro $\mathbf{1} := (1, 0)$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x, y) \times \mathbf{1} = (x, y) \times (1, 0) = (x, y).$$

4. Todos os elementos de $\mathbb{R}^2$ não nulos possuem elemento inverso, isto é,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \exists (x, y)^{-1} \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \times (x, y)^{-1} = \mathbf{1}.$$

Basta tomar $(x, y)^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$.

5. $\times$ é distributiva relativamente à soma $+$: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1) \times ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \times (x_3, y_3).$$

Por verificar estas cinco propriedades, diz-se que $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ é um **corpo**.

Definição 1.2.1 *O conjunto $\mathbb{R}^2$ munido da soma usual $+$ e do produto (1.1) é dito o* **corpo dos números complexos**.
Denotaremos $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \times)$.

Observemos agora algumas propriedades dos números complexos da forma $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Temos, para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

e

$$(x_1, 0) \times (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0).$$

Também, de um ponto de vista da estrutura de **espaço vectorial** de $\mathbb{R}^2$, a multiplicação por $(x, 0)$ não se distingue da multiplicação pelo escalar x:

$$(x, 0) \times (x_1, y_1) = (x x_1, x y_1) = x.(x_1, y_1).$$

Por estas razões, podemos identificar o conjunto

$$\{(x, 0) \in \mathbb{C} \, : x \in \mathbb{R}\}$$

à recta real $\mathbb{R}$. Assim, denotaremos $(x, 0)$ simplesmente x. Em particular, os elementos neutros da soma e da multiplicação, $\mathbf{0} = (0, 0)$ e $\mathbf{1} = (1, 0)$, serão denotados 0 e 1 respectivamente. Não existindo diferença, para números reais, entre o produto usual e a multiplicação (1.1), denotaremos estas duas operações da mesma forma.

Quanto ao complexo $(0, 1)$, observe-se que

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Definição 1.2.2 *O número complexo $i = (0, 1)$ é dito* **número imaginário***.*
Tem-se

$$i^2 = -1.$$

Com esta definição, observe-se que dado um qualquer número complexo (x, y),

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y(0, 1) = x + iy.$$

Assim,

Todo o número complexo $z \in \mathbb{C}$ admite uma representação única sob a forma $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Escreveremos de agora em diante $\mathbb{C} = \{z = x + iy \, : \, x, y \in \mathbb{R}\}$. Esta notação sugere ainda a seguinte definição:

Definição 1.2.3 *Dado um número complexo $z = (x, y) = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}$:*
Diremos que x é a **parte real de** *z, que representamos por $x = Re(z)$, e y é a* **parte imaginária de** *z, que representamos por $y = Im(z)$.*

Em particular, tendo em conta que identificámos os complexos da forma $(x, 0)$ aos números reais, tem-se que

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0\}.$$

Se $Re(z) = 0$, diremos que o número complexo z é um **número imaginário puro**.

- Em tudo o que segue e salvo indicação em contrário, sempre que escrevermos "$z = x + iy$" subentendemos que x e y são números reais, ou seja, que se trata de facto das partes real e imaginária do complexo z. Esta representação é por vezes dita **representação algébrica** dos números complexos.
- É uma consequência imediata desta definição que dados dois números complexos z e z',

$$z = z' \quad \Leftrightarrow \quad Re(z) = Re(z') \wedge Im(z) = Im(z').$$

- Note-se que se pode obter a expressão do produto (1.1) de dois números complexos quaisquer simplesmente a partir da igualdade $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) &= (x_1 + iy_1).(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

- Como vimos, o inverso multiplicativo de $z = x + iy \neq 0$ é dado por

$$z^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - iy).$$

Desta forma, fica definida em $\mathbb{C}$ a **divisão por um complexo não nulo**:
Dados $z, \omega \in \mathbb{C}$ com $z = x + iy \neq 0$,

$$\frac{\omega}{z} := \omega z^{-1} = z^{-1}\omega = \frac{\omega}{x^2 + y^2}(x - iy).$$

Com estas novas notações, podemos resumir da seguinte forma as propriedades dos números complexos estudadas até ao momento:

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,

1. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

3. $z_1 + 0 = z_1$;

4. $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$;

5. $z_1z_2 = z_2z_1$;

6. $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$, onde, se $z = x + iy \neq 0$, $z^{-1} = \dfrac{1}{x^2 + y^2}(x - iy)$.

7. $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

1.2.1 Complexo conjugado e módulo

Definição 1.2.4 *Seja $z = x + iy \in \mathbb{C}$ um número complexo. Define-se o* **complexo conjugado de** z *por*

$$\overline{z} = x - iy,$$

ou seja, $Re(\overline{z}) = Re(z)$ e $Im(\overline{z}) = -Im(z)$.

Temos as seguintes propriedades da conjugação complexa:

- A conjugação é involutiva, i.e.
$$\forall z \in \mathbb{C}\ ,\ \overline{\overline{z}} = z.$$

- A conjugação verifica as seguintes propriedades:
$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\ , \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\ , \quad \overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

- A igualdade $z = \overline{z}$ caracteriza os números reais, i.e.
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Prova :
Os dois primeiros pontos são deixados em exercício. Quanto ao último ponto, dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} z = \overline{z} &\Leftrightarrow x + iy = x - iy \\ &\Leftrightarrow 2iy = 0 \\ &\Leftrightarrow y = Im(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

Desta última propriedade resulta que para todo $z \in \mathbb{C}$, $z + \overline{z}$ e $z\overline{z}$ são números reais, visto coincidirem com os seus respectivos complexos conjugados:

- $\overline{z + \overline{z}} = \overline{z} + \overline{\overline{z}} = \overline{z} + z = z + \overline{z}$
- $\overline{z\overline{z}} = \overline{z} \,.\, \overline{\overline{z}} = \overline{z} \,.\, z = z\overline{z}$.

Mais precisamente, denotando por x e y as partes real e imaginária de z respectivamente,

- $z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x$;
- $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \geq 0$.

Obtivemos assim, por um lado, que

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}.$$

Da mesma forma,

$$Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Por outro lado, obtivemos que para todo $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z}$ é um número real positivo ou nulo. Podemos pois apresentar a seguinte definição:

Definição 1.2.5 *Seja* $z = x + iy \in \mathbb{C}$, *onde* $x, y \in \mathbb{R}$.

Define-se o **módulo de** z *por*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Note-se que se $z \in \mathbb{R}$, o módulo complexo de z coincide com o seu valor absoluto. Note-se ainda que o módulo $|z|$ coincide com a norma euclidiana do vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Assim sendo, as seguintes propriedades são de prova imediata :

- $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

Um pequeno cálculo permite ainda provar que

- $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;
- $\forall \in \mathbb{C}, \quad |\overline{z}| = |z|$;
- $\forall \in \mathbb{C} \setminus \{0\} := \mathbb{C}^*, \quad |z^{-1}| = |z|^{-1}$.

Finalmente, se $z \neq 0$, e uma vez que $z\overline{z} = |z|^2$, $z.\dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$.
Obtemos assim mais uma vez a expressão de z^{-1}:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

1.2.2 O grupo unitário $\mathbb{U}$

Consideremos o conjunto

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ , \ |z| = 1\}$$

formado pelos números complexos de módulo 1.

Propriedade 1.2.6 $(\mathbb{U}, \times)$ *é um grupo comutativo, dito* **grupo unitário**.

Prova:

1. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$. Tem-se $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 1$.
   Logo, a operação é interna: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}$, $z_1 z_2 \in \mathbb{U}$.
2. O produto de números complexos é associativo: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{U}$, $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$.
3. O elemento neutro $1 \in \mathbb{U}$.
4. Dado $z \in \mathbb{U}$, $|z^{-1}| = \left|\dfrac{\overline{z}}{z^2}\right| = \dfrac{|\overline{z}|}{|z|^2} = 1$, pelo que $z^{-1} \in \mathbb{U}$.
5. O produto de números complexos é comutativo: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1$.

$\blacksquare$

O grupo unitário pode ser usado para fornecer a seguinte representação dos números complexos não nulos:

Propriedade 1.2.7 *Seja $z \in \mathbb{C}^*$. Então z decompõe-se de maneira única sob a forma :*

$$z = ru,$$

com $r \in \mathbb{R}^+$ e $u \in \mathbb{U}$.

Prova :

Como $z \neq 0$, $z = |z|.\dfrac{z}{|z|}$, ou seja, podemos escolher $r = |z|$ e $u = \dfrac{z}{|z|}$,
o que nos dá a existência de uma tal decomposição.

Quanto à unicidade, basta reparar que se $z = ru = r'u'$, com $r, r \in \mathbb{R}^+$ e $u, u' \in \mathbb{U}$, então $|ru| = |r'u'|$. Como tal, $|r||u| = |r'||u'|$ e $r = r'$. Desta última igualdade resulta que $u = u'$. ■

1.2.3 Representação polar dos números complexos

Seja $z \in \mathbb{C}^*$. Já vimos que z pode ser escrito de maneira única sob a forma :

$$z = |z|u \ , \ u \in \mathbb{U}. \tag{1.2}$$

Esta decomposição dos complexos não nulos é dita decomposição polar.
Determinemos u:
Visto que $u \in \mathbb{U}$, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $u = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Escrevendo $x = Re(z)$ e $y = Im(z)$, obtém-se, tomando as partes real e imaginária de (1.2),

$$cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Este pequeno cálculo leva-nos à seguinte definição :

Definição 1.2.8 *Seja $z \in \mathbb{C}^*$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.*

Então, $\theta \in \mathbb{R}$ é dito um **argumento** *de z se verificar*

$$cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ e \ sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

ou seja

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

O argumento de um número complexo não nulo é obviamente único a menos de um múltiplo inteiro de 2π. É habitual privilegiar-se um argumento da seguinte forma:

Definição 1.2.9 *Seja* $z \in \mathbb{C}^*$, $z = x + iy$, $z, y \in \mathbb{R}$. *O único real* $\theta_0 \in]-\pi; \pi]$ *que verifica*

$$\cos(\theta_0) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \ \sin(\theta_0) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

é dito **Argumento Principal** *de* z, *e é denotado*

$$\theta_0 = Arg(z).$$

O conjunto de todos os argumentos de z *é então dado por*

$$arg(z) = \{\theta = Arg(z) + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Propriedade 1.2.10 *Sejam* $z, z' \in \mathbb{C}^*$. *Então*

$$z = z' \ \Leftrightarrow \ |z| = |z'| \ e \ Arg(z) = Arg(z').$$

Este resultado é uma consequência imediata da unicidade de decomposição polar e da definição de $Arg(z)$. ■

Observemos agora a seguinte propriedade fundamental:

Propriedade 1.2.11 *Seja* $\theta \in \mathbb{R}$ *um argumento de* $z \in \mathbb{C}^*$ *e* $\theta' \in \mathbb{R}$ *um argumento de* $z' \in \mathbb{C}^*$. *Então* $\theta + \theta'$ *é um argumento de* zz'.

Prova:

Por definição,

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \text{ e } z' = |z'|(\cos(\theta') + i\sin(\theta')).$$

Logo,

$$zz' = |z||z'|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) = |zz'|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \\ &\quad + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta)) \\ &= cos(\theta + \theta') + isin(\theta + \theta'),\end{aligned}$$

o que conclui a prova. ■

Na mesma ordem de ideias:

Propriedade 1.2.12 *Seja θ um argumento do complexo não nulo z.*
Então $-\theta$ é um argumento de z^{-1}.

Prova:

Basta observar que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\frac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)} = \frac{1}{|z|}\frac{\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

pelas propriedades de paridade das funções trigonométricas. ■

As duas últimas propriedades permitem provar por indução as seguintes igualdades:

Igualdades de Moivre
Para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta).$$

Fica claro, com esta formulação, a existência de um morfismo multiplicativo-aditivo.
Vamos, por essa razão, introduzir a notação

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta).$$

Por enquanto utilizamos apenas esta notação por comodidade, visto que

- $\forall \theta, \phi \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$;
- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$;
- $e^{0.i} = 1$,

propriedades estas que demonstrámos correctamente. A justificação rigorosa da utilização da função exponencial será feita mais tarde, sendo por enquanto apenas uma "abreviatura" para a expressão "$cos(\theta) + isin(\theta)$".

Assim, $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \ : \ \theta \in \mathbb{R}\}$. Também, para todo $z \in \mathbb{C}^*$, a decomposição polar de z é dada por

$$z = |z|e^{i\theta}, \quad \theta \in arg(z).$$

Finalmente,

Propriedade 1.2.13 *Sejam $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. Então*

$$e^{i\theta} = e^{i\phi} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\, \theta = \phi + 2k\pi.$$

Prova:

De facto, θ e ϕ partilham o mesmo co-seno e o mesmo seno, pelo que diferem de um múltiplo de 2π. ■

Torna-se muito fácil, com este formalismo, compreender geometricamente a multiplicação de dois números complexos. Escrevendo em forma polar

$$z_1 = |z_1|e^{i\theta_1} \quad \text{ e } z_2 = |z_2|e^{i\theta_2},$$

tem-se

$$z = z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

ou seja, o módulo de z é igual ao produto dos módulos de z_1 e z_2 e obtém-se um argumento de z somando argumentos de z_1 e de z_2.

Note-se ainda que podemos dar um resultado um pouco mais preciso do que as Propriedades 1.2.11 e 1.2.12:

Corolário 1.2.14 *Sejam z e z' dois complexos não nulos.*
Então

1. $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$;
2. $arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -arg(z)$;
3. $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$.

Aqui,

$$arg(z) + arg(z') = \{\theta + \theta' \in \mathbb{R} \,:\, \theta \in arg(z) \wedge \theta' \in arg(z')\}$$

e

$$-arg(z) = \{-\theta \in \mathbb{R} \,:\, \theta \in arg(z)\}.$$

Prova:

1. Pela Propriedade 1.2.11, $arg(z) + arg(z') \subset arg(zz')$.
   Inversamente, seja $\phi \in arg(zz')$, com $z = |z|e^{i\theta}$ e $z' = |z'|e^{i\theta'}$. Tem-se
   $$zz' = |zz'|e^{i\phi} = |zz'|e^{i(\theta+\theta')}.$$
   Pela Propriedade 1.2.13, $\phi = \theta + \theta' + 2k\pi = \theta + (\theta' + 2k\pi) \in arg(z) + arg(z')$.

2. Pela Propriedade 1.2.12, $-arg(z) \subset arg\left(\frac{1}{z}\right)$.
   Inversamente, seja $\phi \in arg\left(\frac{1}{z}\right)$. Por definição,
   $$\frac{1}{z} = \left|\frac{1}{z}\right| e^{i\phi},$$
   ou seja $z = |z|e^{-i\phi}$: tem-se portanto $-\phi \in arg(z)$, de onde resulta que $\phi \in -arg(z)$.

3. Basta observar que $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$ pelas propriedades anteriores. ∎

1.2.4 Aplicação : Raízes n-ésimas da unidade

Em $\mathbb{R}$, a equação
$$x^n = 1$$
possui uma $(x = 1)$ ou duas $(x = \pm 1)$ soluções consoante o número inteiro n é ímpar ou par.

Em $\mathbb{C}$, existem sempre n soluções distintas:

Teorema 1.2.15 *O conjunto das soluções da equação*
$$z^n = 1 \tag{1.3}$$
é dado por
$$\mathcal{S} = \{z_0^0, z_0^1, \ldots, z_0^{n-1}\},$$
onde $z_0 = e^{\frac{2\pi}{n}i}$.

Prova :

Vamos procurar z sob forma polar $z = |z|e^{i\theta}$:

$$z^n = 1 \Leftrightarrow |z|^n e^{in\theta} = 1e^{0.i} \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ e } n\theta = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Temos assim

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z},$$

e

$$z \in \{1\ ,\ e^{1.\frac{2\pi}{n}}\ ,\ e^{2.\frac{2\pi}{n}}\ ,\ \ldots\ ,\ e^{(n-1).\frac{2\pi}{n}}\}.$$

■

As soluções da equação (1.3) formam pois no plano complexo um polígono regular de n vértices.

1.2.5 Aplicação: Trigonometria circular

As propriedades algébricas da exponencial complexa $e^{i\theta}$ permitem deduzir muito facilmente as fórmulas de trigonometria usuais. Por exemplo, observando que

$$e^{2i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^2,$$

vem

$$cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta),$$

de onde se tira, igualando as partes real e imaginária, que

$$\boxed{\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \qquad\qquad \sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta).}$$

Da mesma forma, a igualdade $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$ fornece rapidamente a identidade

$$\begin{aligned} \cos(a+b) + i\sin(a+b) &= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + isin(b)) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).}$$

As igualdades $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$ fornecem o seno e o co-seno de θ em função da exponencial complexa:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \tag{1.4}$$

De salientar as óbvias semelhanças entre estas fórmulas e a definição das funções trigonométricas hiperbólicas

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Elevando ao quadrado, as fórmulas (1.4) permitem obter muito facilmente as identidades

$$\boxed{\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}.}$$

De forma mais sistemática, podemos "linearizar" expressões trigonométricas, o que é particularmente útil, por exemplo, na primitivação de certos polinómios trigonométricos. Por exemplo, para calcularmos a primitiva

$$\int \cos^4(x)dx,$$

observemos que

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}(e^{i4x} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{-3ix}e^{ix} + e^{-4ix}) \\
&= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8},
\end{aligned}$$

pelo que

$$\int \cos^4(x)dx = \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

1.2.6 Aplicação: raízes de polinómios do segundo grau

Consideremos a equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.5}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Esta equação é equivalente a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Completando o quadrado,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0,$$

ou seja,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Encontramos assim um resultado já conhecido:

- Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, a equação (1.5) possui duas raízes reais.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, a equação (1.5) possui uma única raíz

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a equação não possui obviamente soluções reais. No entanto, observando que $(i\sqrt{|\Delta|})^2 = \Delta$, (1.5) é equivalente a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2,$$

ou seja,

$$\left(x + \frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right) = 0.$$

Como $\mathbb{C}$ não possui divisores de zero, obtemos as duas raízes complexas conjugadas

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}.$$

1.2.7 Topologia de $\mathbb{C}$.

Definição 1.2.16 *Dados dois números complexos z_1, z_2, definimos a* **distância** *de entre z_1 e z_2 por*

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|.$$

Esta distância verifica os três axiomas:

1. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$.
2. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ (simetria) ;
3. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$ (desigualdade triangular).

Tomando $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_1 = x_2 + iy_2$,

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d_E((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

Assim, munido desta distância, $\mathbb{C}$ identifica-se ao plano euclidiano $(\mathbb{R}^2, d_E)$, via a isometria (ver definição no início do capítulo seguinte)

$$\begin{cases} \theta : & (\mathbb{C}, d) & \to & (\mathbb{R}^2, d_E) \\ & z & \to & (Re(z), Im(z)) \end{cases}$$

Dá-se o nome de **plano complexo** ou **plano de Argand** ao conjunto $\mathbb{C}$ munido da distância d. Pela isometria existente entre o plano de Argand e o plano real, podemos "importar" todo o vocabulário de geometria euclidiana :

- Podemos falar do **ponto** z para designar o número complexo z.

- Designamos por **eixo real** o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0\}$, e por **eixo imaginário** o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) = 0\}$.

- Para $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, definimos o **segmento** $[z_1; z_2]$ por
$$[z_1; z_2] = \{tz_2 + (1-t)z_1 \ , \ t \in [0; 1]\}.$$

- Para $r > 0$, o conjunto $\{z \in \mathbb{C} \ , \ |z - a| = r\}$ pode ser identificado à circunferência de centro a e de raio r. Em particular o grupo unitário $\mathbb{U}$ corresponde à circunferência trigonométrica.

A topologia de $\mathbb{C}$ é pois uma cópia da topologia de $\mathbb{R}^2$ estudada na disciplina de Análise Matemática 2. Em particular, designaremos por $D_a(\epsilon)$ o disco aberto centrado em $a \in \mathbb{C}$ e de raio ϵ:
$$D_a(\epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \epsilon.\}$$
Sendo o plano complexo bidimensional, preferimos o termo "disco" ao termo "bola". Com esta definição seguem as definições topológicas usuais:

- $A \subset \mathbb{C}$ diz-se **aberto** se
$$\forall z_o \in A, \exists \epsilon > 0, \ D_{z_0}(\epsilon) \subset A.$$

- $A \subset \mathbb{C}$ diz-se **fechado** se $A^c = \mathbb{C} \setminus A$ é um conjunto aberto.

- O ponto z_0 diz-se **ponto fronteira** de A se
$$\forall \epsilon > 0, \ D_{z_o}(\epsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge D_{z_o}(\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset.$$
Designa-se por **fronteira de** A $(fr(A))$ o conjunto de todos os pontos fronteira de A.

- A **aderência de** A é o conjunto
$$\overline{A} = A \cup fr(A).$$
Trata-se do mais pequeno conjunto fechado que contém A.
O conjunto A é fechado se e só se $\overline{A} = A$.

- O conjunto A diz-se **limitado** se
$$\exists M > 0, \forall z \in A, \ |z| \leq M.$$

- o conjunto A diz-se **compacto** se A for fechado e limitado.

2 Funções complexas e Geometria

O objectivo deste capítulo é o estudo preliminar das funções de variável e valores complexos, ou seja, funções do tipo

$$\begin{cases} f: & A \subset \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \hookrightarrow & w = f(z). \end{cases}$$

A representação de tais funções não é necessariamente simples uma vez que seriam necessárias quatro dimensões para desenhar o seu gráfico. Assim, ilustraremos frequentemente f com diagramas de correspondência entre a variável z e a sua imagem $w = f(z)$. Se f for bijectiva, diremos que f é uma **transformação do plano complexo**.

O corpo dos números complexos é especialmente bem adaptado à representação de algumas transformações geométricas simples do plano.

2.1 Isometrias do plano

Definição 2.1.1 *Uma função bijectiva $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diz-se uma* **isometria** *se preservar as distâncias, isto é, se*

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad d(f(z_1), f(z_2)) = d(z_1, z_2).$$

Nesta secção vamos classificar todas as isometrias do plano.

Definição 2.1.2 *Seja $z_0 \in \mathbb{C}$.*
A transformação

$$\begin{cases} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \hookrightarrow & z + z_0, \end{cases}$$

diz-se a **translação** *de z_0.*

Dado um ponto $z = x + iy$, $f(z) = (x + x_0) + i(y + y_0)$: a imagem por f do ponto $M = (x, y)$ do plano é o ponto $(x + x_0, y + y_0) = M + \vec{t_0}$, onde $\vec{t_0} = (x_0, y_0)$.

Exemplo: Determine e represente a imagem do triângulo

$$\mathcal{T} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}$$

pela transformação definida por $f(z) = z + 1 + i$.

A transformação f é uma translação. A imagem do triângulo $\mathcal{T}$ por f é portanto um triângulo $\mathcal{T}'$. Para o determinar, basta calcular a imagem dos vértices de $\mathcal{T}$: $f(0) = 1 + i$, $f(1) = 2 + i$ e $f(1 + i) = 2 + 2i$: $\mathcal{T}'$ é o triângulo de vértices $1 + i$, $2 + i$ e $2 + 2i$. ■

Observemos agora o efeito da multiplicação por um complexo de módulo 1. Seja $u = e^{i\phi} \in \mathbb{U}$. Para $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ tem-se $uz = re^{i(\theta+\phi)}$, ou seja:

- $|uz| = |z|$: z e uz estão à mesma distância da origem;
- $arg(uz) = arg(z) + \phi$.

Desta forma:

Definição 2.1.3 *Seja* $u = e^{i\phi} \in \mathbb{U}$.
A transformação

$$\begin{cases} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \hookrightarrow & uz \end{cases}$$

diz-se a **rotação** *de centro* 0 *e de ângulo* ϕ.

Exemplo: A transformação definida por $f(z) = iz$ é a rotação de centro 0 e de ângulo $\frac{\pi}{2}$. ■
À rotação centrada na origem e de ângulo π ($f(z) = -z$) é habitual chamar-se **simetria central** de centro 0. Por outro lado, a rotação de ângulo 0, $f(z) = z$, é a identidade.

A transformação $z \to \overline{z}$ é a reflexão de eixo $\Delta_0 = \mathbb{R}$.

Como representar a reflexão de eixo $\Delta_\phi = \{te^{i\phi} : t \in \mathbb{R}\}$?

Seja $f_\phi(z) = e^{i\phi}z$ a rotação centrada em 0 e de ângulo ϕ. Observando que $f_{-\phi}(\Delta_\phi) = \Delta_0$ podemos calcular a imagem de $z \in \mathbb{C}$ pela reflexão de eixo Δ_ϕ do seguinte modo:

1. Executamos a rotação de ângulo $-\phi$, por forma a trazer a recta Δ_ϕ para Δ_0:
$$f_{-\phi}(z) = e^{-i\phi}z.$$
2. Fazemos a reflexão de eixo Δ_0:
$$\overline{f_{-\phi}(z)} = \overline{e^{-i\phi}z} = e^{i\phi}\overline{z}.$$
3. Voltamos a colocar o eixo de reflexão na sua posição original, aplicando a rotação de ângulo ϕ:
$$f_\phi\left(\overline{f_{-\phi}(z)}\right) = e^{i\phi}\overline{e^{-i\phi}z} = e^{2i\phi}\overline{z}.$$

Assim,

Definição 2.1.4 *Seja* $\phi \in \mathbb{R}$.
A transformação

$$\begin{cases} f: & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \hookrightarrow & e^{2i\phi}\overline{z} \end{cases}$$

diz-se a **reflexão** *de recta* $\Delta_\phi = \{te^{i\phi} \,:\, t \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo: A reflexão relativamente ao eixo imaginário é dada por $f(z) = e^{2i\frac{\pi}{2}}\overline{z} = -\overline{z}$.
De facto, é esta a transformação que conserva a parte imaginária de z e inverte a sua parte real.■

O seguinte teorema, que deixaremos sem prova, descreve todas as isometrias do plano que fixam a origem:

Teorema 2.1.5 *Seja* f *uma isometria do plano tal que* $f(0) = 0$.
Então f *é uma rotação centrada na origem ou uma reflexão cujo eixo contém a origem:*

- $f(z) = e^{i\theta}z$ *(rotação centrada em* 0 *e de ângulo* θ*)*

  $\vee$

- $f(z) = e^{i\theta}\overline{z}$. *(reflexão de eixo* $\Delta_{\frac{\theta}{2}}$*)*

Um importante corolário deste resultado descreve todas as isometrias do plano:

Teorema 2.1.6 *Seja* f *uma isometria do plano.*
Então f *é da forma*

- $f(z) = e^{i\theta}z + z_0$ *(isometrias directas)*

  $\vee$

- $f(z) = e^{i\theta}\overline{z} + z_0$. *(isometrias indirectas)*

Prova:

Seja f uma isometria e $z_0 := f(0)$. Então $g(z) = f(z) - z_0$ fixa a origem: $g(0) = 0$.
Pelo Teorema 2.1.5, g é da forma $g(z) = e^{i\theta}z$ ou $g(z) = e^{i\theta}\overline{z}$, o que conclui a prova. ■

2.1.1 Estudo das isometrias directas

Seja $f(z) = uz + z_0$ uma isometria directa do plano, onde $u = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

- Se $u = 1$, f é a translação de z_0.
- Se $u \neq 1$, f possui um único ponto fixo $w = \dfrac{z_0}{1-u}$. Podemos então escrever

$$f(z) = uz + z_0 = uz + w(1-u) = u(z-w) + w.$$

A transformação f é portanto a composição, nesta ordem, da translação de $-w$, da rotação centrada em 0 e de ângulo θ e finalmente da translação de w.
Trata-se da rotação de centro w e ângulo θ.

Exemplo: Caracterize a transformação definida por $f(z) = iz + 1$.

Como $|i| = 1$, f é uma isometria directa. Visto que $i \neq 1$, f é uma rotação. O centro é dado pela equação $f(w) = w$, ou seja, $w = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Finalmente, como $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, o ângulo da rotação é $\dfrac{\pi}{2}$. ■

2.1.2 Estudo das isometrias indirectas

Seja $f(z) = u\overline{z} + z_0$ uma isometria indirecta do plano, onde $u = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

- Se $u\overline{z_0} + z_0 = 0$,

$$f(z) = u\overline{z} + z_0 = u\overline{\left(z - \frac{z_0}{2}\right)} + \frac{z_0}{2}.$$

f é a composição, nesta ordem, da translação de $-\dfrac{z_0}{2}$, da reflexão de eixo $\Delta_{\frac{\theta}{2}}$ e da translação de $\dfrac{z_0}{2}$. Trata-se da reflexão de eixo $\dfrac{z_0}{2} + \Delta_{\frac{\theta}{2}}$.

- Se $c = \dfrac{1}{2}(u\overline{z_0} + z_0) \neq 0$:
Tem-se $u\overline{(z_0 - c)} + (z_0 - c) = 0$. Então,

$$f(z) = (u\overline{z} + z_0 - c) + c$$

é a composição da reflexão de recta $\dfrac{z_0 - c}{2} + \Delta_{\frac{\theta}{2}}$ e da translação de c.

A transformação f é então dita **reflexão deslizante** por se tratar da composição de uma reflexão e de uma translação paralela ao eixo da reflexão, uma vez que

$$c = \frac{1}{2}(u\overline{z_0} + z_0) = \frac{1}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\overline{z_0} + \overline{e^{i\frac{\theta}{2}}\overline{z_0}}\right) \ : \ \frac{\theta}{2} \in arg(c) \vee \frac{\theta}{2} + \pi \in arg(c),$$

consoante o sinal do número real $e^{i\frac{\theta}{2}}\overline{z_0} + \overline{e^{i\frac{\theta}{2}}\overline{z_0}}$.

Exemplo: Caracterize a transformação definida por $f(z) = i\overline{z} + 2$.

Como $|i| = 1$, a transformação f é uma isometria indirecta. Tem-se

$$c = \frac{1}{2}(i\overline{2} + 2) = 1 + i \neq 0,$$

pelo que f é uma reflexão deslizante de eixo $\Delta_{\frac{\pi}{4}} + \dfrac{1-i}{2}$, $c = 1 + i$. ■

Em particular acabámos de provar o seguinte resultado:

Teorema 2.1.7 *Sejas f uma isometria do plano.*
Então f é uma translação, uma rotação, uma reflexão ou uma reflexão deslizante.

2.2 Homotetias

Definição 2.2.1 *Seja $a \in \mathbb{R}^+$.*
A transformação

$$\begin{cases} f: & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \hookrightarrow & az \end{cases}$$

diz-se a **homotetia** *de centro* 0 *e de razão a.*

Dado $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $f(z) = are^{i\theta}$: 0, z e $f(z)$ são colineares, isto é, pertencem à mesma recta. A distância de $f(z)$ à origem é dada por $|f(z)| = a|z|$.

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$d(f(z_1), f(z_2)) = |f(z_2) - f(z_1)| = |az_1 - az_2| = a|z_1 - z_2| = a \times d(z_1, z_2).$$

Se $a > 1$ (resp. $a < 1$), f aumenta (resp. diminui) a distância de z_1 a z_2. Por essa razão,

- Se $a > 1$, f diz-se uma ampliação.
- Se $a < 1$, f diz-se uma redução.

  (se $a = 1$, f é a identidade).

Exemplo: Caracteriza a transformação definida por $f(z) = (1+i)z + i$.

Temos $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, pelo que

$$f(z) = \sqrt{2}(e^{i\frac{\pi}{4}}z) + i :$$

a transformação f é a composição, nesta ordem, da rotação centrada em 0 e de ângulo $\dfrac{\pi}{4}$, da ampliação de razão $r = \sqrt{2}$ e da translação de i. ■

2.3 A função quadrática

Consideremos a função $f(z) = z^2$. Uma primeira observação:

$$|f(z)| = |z|^2.$$

Denotando por C_r a circunferência centrada em 0 e de raio $r \geq 0$, os pontos da circunferência C_r são enviados para a circunferência C_{r^2}. Em particular, o grupo unitário $\mathbb{U}$ é invariante por esta transformação.
Por outro lado, se θ é um argumento de z, 2θ é um argumento de $f(z)$. Desta forma, a semi-recta R_θ é transformada na semi-recta $R_{2\theta}$.

Definindo $A = \{z \in \mathbb{C} \,:\, Im(z) > 0\} \cup \mathbb{R}_0^+$, $f|_A \,:\, A \to \mathbb{C}$ é uma bijecção.

Este facto pode ser verificado facilmente. Observemos que $A = \{re^{i\theta} \,:\, r \geq 0 \wedge 0 \leq \theta < \pi\}$.

- Sejam $z_1 = r_1e^{i\theta_1}, z_2 = r_2e^{i\theta_2} \in A$ tais que $f(z_1) = f(z_2)$. Então

  $$r_1^2e^{2i\theta_1} = r_2^2e^{2i\theta_2}.$$

  Por unicidade da decomposição polar dos números complexos, $r_1^2 = r_2^2$ e $e^{2i\theta_1} = e^{2i\theta_2}$, ou seja $r_1 = r_2$ e $\theta_1 = \theta_2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Como $-\pi < \theta_1 - \theta_2 < \pi$, $\theta_1 = \theta_2$.
  Conclui-se então que $z_1 = z_2$, pelo que $f|_A$ é injectiva.

- Seja $w = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Então, definindo $z = \sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}$, $f(z) = w$ e $f|_A$ é sobrejectiva.

3 Funções da variável complexa

3.1 Limites e continuidade

Já foi referido que, de um ponto de vista topológico, o plano complexo $\mathbb{C}$ é uma cópia do plano $\mathbb{R}^2$. Assim, as definições e resultados que seguem são uma mera tradução dos conceitos estudados em Análise Matemática 2 em linguagem dos números complexos.

Definição 3.1.1 *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função da variável complexa e $z_0 \in \overline{U}$. Diz-se que f* **tende para** *$l \in \mathbb{C}$* **quando** *z* **tende para** *z_0 se*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall z \in U, \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \epsilon.$$

Denota-se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l.$$

Esta condição resume-se naturalmente à existência, para todo $\epsilon > 0$, de um disco $D_{z_o}(\delta)$ tal que

$$f(D_{z_0}(\delta) \cap U) \subset D_l(\epsilon).$$

Propriedade 3.1.2 *Sejam f e g duas funções tais que*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l_1 \ \textit{e} \ \lim_{z \to z_0} g(z) = l_2.$$

Então : $\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = l_1 + l_2$ *e* $\lim_{z \to z_0} (f(z)g(z)) = l_1 l_2$.

Se $l_2 \neq 0$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Definição 3.1.3 *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função da variável complexa e $z_0 \in U$. Diz-se que f é contínua em z_0 se*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0),$$

ou, de forma equivalente, se

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in U, \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Propriedade 3.1.4 Soma, produto e quociente de funções contínuas
Sejam f e g duas funções contínuas em z_0.
Então as funções $f+g$ e fg são contínuas em z_0.

Para mais, se $g(z_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ é contínua em z_0.

Propriedade 3.1.5 Composição de funções contínuas
Sejam $f : U \subset \mathbb{C} \to A \subset \mathbb{C}$ e $g : A \to \mathbb{C}$ duas funções.

Se f é contínua em $z_0 \in A$ e g for contínua em $w_0 = f(z_0) \in B$, então $g \circ f$ é contínua em z_0.

Fornecemos apenas uma prova desta última propriedade:

Seja $\epsilon > 0$.
A função g é contínua em $w_0 = f(z_0)$, logo

$$\exists \delta' > 0, \quad \forall z \in A, \quad |z - w_0| < \delta' \Rightarrow |g(z) - g(w_0)| < \epsilon.$$

Seja um tal $\delta' > 0$. A função f é contínua em z_0, pelo que

$$\exists \delta > 0, \quad \forall z \in U, \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \delta'.$$

Assim, para $|z - z_0| < \delta$,

$$|g(f(z)) - g(f(z_0))| < \epsilon,$$

e acabámos de provar que

$$\lim_{z \to z_0} g \circ f(z) = g \circ f(z_0).$$

■

Consideremos uma função $f : U \subset \mathbb{C} \in \mathbb{C}$. Definimos as funções de duas variáveis "parte real" e "parte imaginária" de f por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= Re(f(x+iy)) \\ v(x,y) &= Im(f(x+iy)), \end{aligned}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x + iy \in U$.

Desta forma, para todo $z = x + iy \in U$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

É fácil observar que

Propriedade 3.1.6 *Seja* $z_0 = x_0 + iy_0 \in u$. *Então*

$$f \text{ contínua em } z_0 \Leftrightarrow u \text{ e } v \text{ são contínuas em } (x_0, y_0).$$

3.2 Funções elementares

3.2.1 A função exponencial

Definição 3.2.1 *Seja* $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. *Define-se a exponencial de* z *por*

$$\exp(z) = e^z := e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Nesta definição, e^x designa naturalmente a exponencial real já conhecida. Algumas observações:

- Se $z \in \mathbb{R}$ (isto é, se $z = x$, $e^z = e^x(\cos(0) + i\sin(0)) = e^x$, pelo que a exponencial complexa coincide, na recta real, com a função exponencial real.
- Da mesma forma, se $z = iy$ é um número imaginário puro, $e^z = e^{0+iy} = e^0(\cos(y)+i\sin(y)) = \cos(y)+i\sin(y)$: esta definição é igualmente compatível com a definição apresentada no capítulo anterior.

Propriedade 3.2.2

- *Para todo* $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$.
- *A função exponencial é* $2i\pi$ *periódica, isto é,*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \exp(z + 2i\pi).$$

- *Seja, para* $b \in \mathbb{R}$, *a banda* $A_b = \{z \in \mathbb{C} : b \leq Im(z) < b + 2\pi\}$.
  Então

$$\exp|_{A_b} : A_b \to \mathbb{C}^*$$

  é uma bijecção.

Prova:

1. Seja $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Tem-se $|e^z| = |e^x e^{iy}| = |e^x||e^{i\theta}| = e^x \neq 0$, pelo que $e^z \neq 0$.

2. Basta observar que
$$e^{z+2i\pi} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^z.$$

3. A função $\exp|_{A_b}$ é sobrejectiva:
Seja $w = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$, $r > 0$.
Escolhendo $y = \theta + 2k\pi$ por forma a que $b \leq y < b + 2\pi$ e $x = \ln(r)$,
$$e^{x+iy} = e^{\ln(r)}(\cos(y) + i\sin(y)) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = w, \qquad z = x + iy \in A_b.$$
Também, $f|A_b$ é injectiva:
Sejam $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in A_b$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, tais que $e^{z_1} = e^{z_2}$.
Então, por unicidade da decomposição polar, $e^{x_1} = e^{x_2}$ e $e^{iy_1} = e^{iy_2}$. Assim, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Como $-2\pi < y_1 - y_2 < 2\pi$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$. ■

Observação: Seja, para $x_0 \in \mathbb{R}$, r_{x_0} o segmento de recta vertical do conjunto A_b
$$r_{x_0} = \{x + iy \in \mathbb{C} \,:\, x = x_0 \wedge b \leq y < b + 2\pi\}.$$
Qual a imagem de r_{x_0} pela função exponencial? Para $z = x_0 + ib \in r_{x_0}$,
$$\exp(z) = exp(x_0 + ib) = e^{x_0}(cos(y) + isin(y)), \quad b \leq y < b + 2\pi.$$
Trata-se de uma circunferência centrada em 0 e de raio e^{x_0}. Como a função exponencial real toma todos os valores positivos não nulos, estas circunferências cobrem de facto todo o plano complexo com excepção da origem.

Destas propriedades podemos deduzir o seguinte corolário:

Corolário 3.2.3 *Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.*
$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z_1 = z_2 + 2k\pi.$$

Finalmente, combinando as propriedades da função exponencial real e as propriedades de e^{iy} provadas no capítulo anterior, é fácil demonstrar a seguinte proposição:

Propriedade 3.2.4 *Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Então*

- $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;
- $e^{-z_1} = \dfrac{1}{z_1}$;
- $\dfrac{e^{z_2}}{e^{z_1}} = e^{z_2-z_1}$;

3.2.2 Trigonometria complexa

Vimos que para $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ e $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Estas identidades vão permitir estender ao plano complexo as funções co-seno e seno, por forma a coincidirem, no eixo real, com as funções trigonométricas usuais.

Definição 3.2.5 *Para todo $z \in \mathbb{C}$, define-se*

$$cos(z) := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

e

$$sin(z) := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Da mesma forma, define-se o co-seno e o seno hiperbólico no plano complexo por

Definição 3.2.6 *Para todo $z \in \mathbb{C}$,*

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$$

e

$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})$$

Algumas propriedades elementares destas funções:

Propriedade 3.2.7

1. $\cos$ *e* $\sin$ *são* 2π*-períodicas, isto é,*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos(z) \quad e \quad \sin(z + 2\pi) = \sin(z).$$

2. $\cosh$ *e* $\sinh$ *são* $2i\pi$*-períodicas, isto é,*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cosh(z + 2i\pi) = \cosh(z) \quad e \quad \sinh(z + 2i\pi) = \sin(z).$$

3. $\cos$ *e* $\cosh$ *são funções pares.*

4. $\sin$ *e* $\sinh$ *são funções ímpares.*

5. *Contrariamente ao caso real, as funções* $\cos$ *e* $\sin$ *não são limitadas.*

Prova:

Seja $z \in \mathbb{C}$. Tem-se

$$\cos(z+2\pi) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}\right) = \frac{1}{2}(e^{iz}e^{2i\pi} + e^{-iz}e^{2i\pi}) = \cos(z).$$

Um cálculo análogo mostra a periodicidade de sin, cosh e sinh.

Por outro lado,

$$\cos(-z) = \frac{1}{2}\left(e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}\right) = \frac{1}{2}(e^{-iz} + e^{iz}) = \cos(z).$$

Um cálculo análogo permite mostrar que $\sin(-z) = -\sin(z)$, $\cosh(-z) = \cosh(z)$ e que $\sinh(-z) = -\sinh(z)$.

Finalmente, observe-se por exemplo que tomando $z = ix$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(ix) = \frac{1}{2}\left(e^{i(ix)} + e^{-i(-ix)}\right) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \cosh(x) \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \cos(ix) = +\infty.$$

■

Este último cálculo sugere uma relação mais próxima entre a trigonometria circular e a trigonometria hiperbólica no plano complexo. Algumas fórmulas que a ilustram encontram-se sintetizadas na proposição seguinte:

Propriedade 3.2.8 *Seja* $z \in \mathbb{C}$.

1. $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$;
2. $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$;
3. $\cosh(iz) = \cos(z)$;
4. $\sinh(iz) = \sin(z)$;
5. $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$;
6. $\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$ *onde* $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Prova:

Mostramos apenas a segunda identidade, ficando as restantes como exercício. Para $z \in \mathbb{C}$,

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = \frac{1}{4}(e^z + e^{-z})^2 + (e^z - e^{-z})^2 = \frac{1}{4}((e^{2z} + 2e^z e^{-z} + e^{-2z} - (e^{2z} - 2e^z e^{-z} + e^{-2z})) = 1.$$

■

As propriedades 5. e 6. permitem determinar os zeros das funções seno e co-seno no plano complexo. De facto,

$$\cos(x+iy) = 0 \Leftrightarrow \cos(x)\cosh(y) = 0 \wedge \sin(x)\sinh(y) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \wedge \sinh(y) = 0$$

Da mesma forma,

$$\sin(x+iy) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \wedge \sinh(y) = 0.$$

Acabámos de provar a seguinte propriedade:

Propriedade 3.2.9

$$\begin{aligned} \cos(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}; \\ \sin(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por outras palavras, não se introduziram novos zeros para estas funções ao estendê-las ao plano complexo. Podemos pois definir a função tangente:

Definição 3.2.10 *Para $z \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, define-se*

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Sendo períodica, a função sin não pode ser bijectiva. Trata-se no entanto de uma função sobrejectiva. Restringindo adequadamente o seu domínio, é possível tornar esta função bijectiva, tal como foi feito para a função exponencial.

3.2.3 Logaritmos complexos

Definição 3.2.11 *Seja $z \in \mathbb{C}^*$.*
Todo o complexo w que verifique a equação

$$e^w = z$$

é dito **um logaritmo** *de z.*

O **conjunto** *de todos os logaritmos de z será denotado por*

$$\log(z) = \{w \in \mathbb{C} \,:\, e^w = z\}.$$

Alguns exemplos:

- $z_1 = i\dfrac{\pi}{2}$, $z_2 = i\dfrac{5\pi}{2}$, $z_3 = i\dfrac{9\pi}{2} \ldots$ são logaritmos de $z = i$:

$$\log(i) = \left\{ i\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- $log(0) = \emptyset$.

Com efeito, a função exponencial complexa não é injectiva (visto ser $2i\pi$ periódica) pelo que um mesmo complexo possui vários logaritmos. Este facto coloca dificuldades à definição de uma função logarítmica em $\mathbb{C}$.

Comecemos por analisar a estrutura do conjunto $\log(z)$:

Seja $z = |z|e^{iArg(z)} \in \mathbb{C}^*$.

Então $w = w_1 + iw_2 \in log(z)$ se e só se

$$e^w = z \Leftrightarrow e^{w_1}e^{iw_2} = |z|e^{iArg(z)}.$$

Pela unicidade da decomposição polar dum complexo não nulo,

$$e^w = z \Leftrightarrow e^{w_1} = |z| \text{ e } e^{iw_2} = e^{iArg(z)},$$

i.e.

$$e^w = z \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = Ln(|z|) \\ w_2 = Arg(z) + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Acabámos de provar a seguinte propriedade :

Propriedade 3.2.12 *Seja* $z \in \mathbb{C}^*$.

Então, para todo $w \in \mathbb{C}$,

$$e^w = z \Leftrightarrow Re(w) = Ln(|z|) \qquad \wedge \qquad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad Im(w) = Arg(z) + 2k\pi,$$

ou seja,

$$e^w = z \Leftrightarrow w = Ln(|z|) + i\theta, \quad \theta \in arg(z).$$

Da Propriedade 1.2.14 resultam de forma imediata as seguintes propriedades:

Para $z, z' \in \mathbb{C}^*$,

1. $log(zz') = log(z) + log(z')$;
2. $log\left(\frac{z}{z'}\right) = log(z) - log(z')$.

$log(z)$ é um conjunto, uma vez que $arg(z)$ apenas está definido módulo 2π. Pretendemos agora definir uma função logaritmo propriamente dita. Uma primeira ideia consiste em fixar o argumento dentro de um intervalo de amplitude 2π. Por exemplo, escolhendo o argumento principal, podemos tomar

$$Log(z) = \ln(|z|) + iArg(z) \qquad (Arg(z) \in]-\pi; \pi]).$$

Infelizmente, esta função não é contínua nos pontos da semi-recta

$$R_\pi = \{re^{i\theta} \,:\, r > 0 \wedge \theta = \pi\} = \mathbb{R}^-.$$

Tal deve-se a uma discontinuidade da função argumento principal Arg ao longo desta recta. Note-se por exemplo que $Arg(-1) = \pi$ e $\lim_{\epsilon \to 0} Arg(-1 - \epsilon^2 i) = -\pi$.

Por essa razão, vamos optar por retirar a semi-recta $\mathbb{R}^-$ do domínio de Log:

Definição 3.2.13 Determinação principal do logaritmo

Para todo $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ *define-se* **o ramo principal do logaritmo de** z *por*

$$Log(z) = Ln(|z|) + iArg(z).$$

Obtém-se assim uma função contínua no seu domínio:

Propriedade 3.2.14 *Log é contínua em* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Prova:

Comecemos por notar que, por composição, $z \to Ln(|z|)$ é contínua em $\mathbb{C}/\mathbb{R}^-$.

Seja $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}^-$:

Se $Re(z) > 0$, $Arg(z) = \arcsin\left(Im\left(\frac{z}{|z|}\right)\right)$.

Se $Im(z) > 0$, $Arg(z) = \arccos\left(Re\left(\frac{z}{|z|}\right)\right)$.

Se $Im(z) < 0$, $Arg(z) = -\arccos\left(Re\left(\frac{z}{|z|}\right)\right)$.

Assim, Arg é contínua em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, por composição e produto de funções contínuas. ■

Tomando $b = -\pi$, a Propriedade 3.2.2 estudada no capítulo anterior afirma que

$$\exp|_{A_{-\pi}} : A_{-\pi} \to \mathbb{C}^*,$$

onde $A_{-\pi} = \{z \in \mathbb{C} : -\pi \leq Im(z) < \pi\}$, é uma bijecção. A imagem da recta $Im(z) = -\pi$ pela função exponencial é a semi recta $\mathbb{R}^-$: para $z = x - i\pi$,

$$e^z = e^{x-i\pi} = e^x e^{-i\pi} = -e^x.$$

Desta forma, tomando $A = int(A_{-\pi})$,

$$\exp|_A : A \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$$

é uma bijecção. Trata-se da bijecção inversa da determinação principal do logaritmo:

Propriedade 3.2.15 *Seja* $A = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < Im(z) < \pi\}$

A função

$$\begin{cases} \Psi = exp|_A : & A & \to & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \\ & w & \to & e^w \end{cases}$$

é bijectiva, de bijecção inversa Log.

Prova :

Já vimos que Ψ é uma bijecção e que $Log : A \to C \setminus \mathbb{R}_0^-$. Por outro lado,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-, \quad \Psi \circ Log(z) = e^{\ln(|z|)+iArg(z)} = |z|e^{iArg(z)} = z$$

e

$$\forall w = w_1 + iw_2 \in A, \quad Log \circ \Psi(\omega) = Log(e^w) = Log(e^{w_1} e^{iw_2}) = \ln(e^{w_1}) + iArg(e^{iw_2}) = w.$$

■

Atenção: é necessário ser muito cuidadoso na manipulação algébrica das funções *Log* e exp: estas funções apenas são inversas uma da outra se as restrições forem adequadas. Por exemplo,

$$Log(e^{2i\pi}) = ln(|e^{2i\pi}|) + iArg(e^{2i\pi}) = 0 \neq 2i\pi.$$

As propriedades habituais da função logaritmo também não são necessariamente válidas. Por exemplo, tomando $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ e $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $Log(z_1) = i\dfrac{\pi}{2}$,
$Log(z_2) = \dfrac{2\pi}{3}$ e $Log(z_1 z_2) = Log(e^{i\frac{7\pi}{6}}) = -i\dfrac{5\pi}{6}$:

$$Log(z_1 z_2) \neq Log(z_1) + Log(z_2).$$

Para definir o ramo principal do logaritmo, optámos por escolher um argumento no intervalo $]-\pi;\pi[$ e retirar ao plano recto a semi-recta correspondente ao argumento π. Esta escolha é naturalmente arbitrária:

Definição 3.2.16 *Seja $\phi \in \mathbb{R}$. Para $z \neq 0$, seja Arg_ϕ o único argumento de z no intervalo $]\phi, \phi + 2\pi]$.*
Então, denotando

$$R_\phi = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \, : \, \phi \notin arg(z)\},$$

define-se o **logaritmo de base** ϕ *por*

$$\begin{cases} Log_\phi : & \mathbb{C} \setminus R_\phi & \to & \mathbb{C} \\ & z & \to & \ln(|z|) + iArg_\phi(z) \end{cases}$$

Com estas notações, $Log = Log_{-\pi}$. As propriedades de Log_ϕ são essencialmente as mesmas do ramo principal do logaritmo. Em particular Log_ϕ é uma bijeção, de inversa

$$exp|_A \, : \, A \to \mathbb{C} \setminus R_\phi, \qquad A = \{z \in \mathbb{C} \, : \, \phi < Im(z) < \phi + 2\pi\}.$$

3.2.4 Potências complexas

Definição 3.2.17 *Seja $z \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Define-se o conjunto*

$$z^\alpha = e^{\alpha log(z)} := \{e^{\alpha . l} \in \mathbb{C} \, : \, l \in \log(z)\}.$$

Comecemos por examinar a estrutura de z^α :

Escrevendo de maneira genérica

$$l = Ln(|z|) + i(Arg(z) + 2k\pi)\ ,\ k \in \mathbb{Z},$$

vem

$$z^\alpha = e^{\alpha(Ln(|z|)+i(Arg(z)+2k\pi))} = e^{\alpha(\ln(|z|)+iArg(z))}e^{2i\alpha k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

- Se $\alpha \in \mathbb{Z}$: para todo $k \in \mathbb{Z}$, $e^{2i\alpha k\pi} = 1$, pelo que a expressão z^α admite um só valor.

  Se $\alpha \in Z^+ \cup \{0\}$,

  $$z^\alpha = e^{\alpha(\ln(|z|)+iArg(z)} = e^{\alpha\ln(|z|)}e^{i\alpha Arg(z)} = |z|^\alpha \left(e^{iArg(z)}\right)^\alpha = z \times z \times z \cdots \times z \ (\alpha \text{ vezes}),$$

  pelas fórmulas de Moivre.

  Se $\alpha \in \mathbb{Z}^-$, um cálculo semelhante fornece

  $$z^\alpha = \frac{1}{z} \times \frac{1}{z} \times \frac{1}{z} \cdots \times \frac{1}{z} \ (|\alpha| \text{ vezes}).$$

- Se $\alpha = \frac{1}{2}$, $e^{2i\alpha k\pi} = \pm 1$ (segundo a paridade de k),e

  $$z^{\frac{1}{2}} = \pm e^{\alpha Log(z)}$$

  possui dois valores possiveis.

- Se $\alpha = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $e^{2i\alpha k\pi}$ é uma raíz n-iésima da unidade, admitindo n valores distintos:

  $$z^{\frac{1}{n}} = \{|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{1}{n}Arg(z)}, |z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{1}{n}Arg(z)+\frac{2i\pi}{n}}, \cdots, |z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{1}{n}Arg(z)+(n-1)\frac{2i\pi}{n}}\}.$$

- No caso geral tem-se uma infinidade de valores distinctos para z^α.

Por esta razão, utiliza-se frequentemente o formalismo das **funções multivaluadas**, ou seja, funções que admitem várias imagens para cada objecto. Já vimos alguns exemplos: $arg(z)$, $\log(z)$ e $z^{\frac{1}{n}}$ podem ser vistas como funções deste tipo.
Se quisermos definir correctamente uma função

$$z \to z^\alpha$$

no verdadeiro sentido do termo, podemos por exemplo optar pela seguinte definição:

Definição 3.2.18 Determinação principal da potência complexa
Para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$,
$$z^\alpha := e^{\alpha Log(z)}.$$

Esta definição tem a virtude de coincidir com a de z^n no caso de $n \in \mathbb{Z}$, mas apresenta no entanto dois grandes inconvenientes: as fórmulas

$$(zz')^\alpha = z^\alpha z'^\alpha \text{ e } (z^\alpha)^{\alpha'} = z^{\alpha\alpha'}$$

não se verificam no caso geral.
Assim sendo, sempre que possível, evitaremos utilizar esta definição.
Vamos no entanto definir a função "raíz quadrada"

Definição 3.2.19 *Para todo* $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}^-$, *define-se a função* $z \to \sqrt{z}$ *por*

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}Log(z)} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{Arg(z)}{2}}$$

e

$$\sqrt{0} = 0.$$

De notar que dos dois valores possiveis para $z^{\frac{1}{2}}$ (i.e. das duas soluções da equação $X^2 = z$) escolhemos aquela que tem parte real positiva :

$$Re(\sqrt{z}) = |z|^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{1}{2}Arg(z)\right) > 0.$$

A função $\sqrt{}$ é contínua em 0. Mas atenção: herdámos o problema das potências complexas. No caso geral

$$\sqrt{zz'} \neq \sqrt{z}\sqrt{z'}.$$

Por exemplo, tomando $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ e $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$,

$$\sqrt{z_1 z_2} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \qquad \text{e} \qquad \sqrt{z_1}\sqrt{z_2} = e^{i\frac{3\pi}{8}} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Parece ser mais adequado, em Análise Complexa, considerar funções multivaluadas.
De facto, neste contexto, as seguintes fórmulas são válidas:

- $\log(zz') = \log(z) + \log(z')$;
- $\log\left(\frac{z}{z'}\right) = \log(z) - log(z')$;

- $e^w = z \Leftrightarrow w = \log(z)$;
- $\sqrt[n]{zz'} = \sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{z'}$;
- $(zz')^\alpha = z^\alpha z'^\alpha$ (verifique estas duas últimas asserções).

Ao fixarmos um argumento (por exemplo o argumento principal) para tornar estas funções multivaluadas em funções propriamente ditas, todas estas propriedades deixam de ser verdadeiras.

3.2.5 Funções trigonométricas inversas

Vimos anteriormente que as funções cos e sin são 2π-períodicas. Desta forma, apenas se tornam bijectivas se forem sujeitas a uma restrição conveniente. De outro modo, eventuais funções inversas arccos e arcsin deverão ser obrigatoriamente funções multivaluadas. Começamos pois por resolver, para $w \in \mathbb{C}$, a equação

$$\sin(w) = z.$$

Esta equação é equivalente a

$$e^{iw} - e^{-w} = 2iz,$$

ou ainda

$$(e^{iw})^2 - 2i\omega e^{iw} - 1 = 0.$$

Esta equação do segundo grau possui as soluções

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2},$$

As soluções são então dadas por

$$w \in -i \log(iz \pm \sqrt{1 - z^2}),$$

conforme a definição de log. Com o formalismo das funçõs multivaluadas:

Definição 3.2.20 *Define-se a função multi-valuada* arcsin *por*

$$\arcsin z = -i \log\left(iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Com esta definição,

$$\sin(w) = z \quad \Leftrightarrow \quad w = \arcsin(z).$$

Cálculos análogos permitem estabelecer a seguinte definição:

Definição 3.2.21 *Define-se a função multi-valuada* arccos *por*

$$\arccos z = -i \log\left(z + i(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. *Com esta definição,*

$$\cos(w) = z \quad \Leftrightarrow \quad w = \arccos(z).$$

e

Definição 3.2.22 *Seja* $w \in \mathbb{C}$ *tal que* $\cos(w) \neq 0$ *(isto é,* $w \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$*).*
Para $z \in \mathbb{C}$, *a equação*

$$z = \tan(w)$$

é equivalente a

$$w = \arctan(z) := \frac{i}{2} \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right).$$

Podemos definir ramos das funções arccos, arcsin e arctan fixando por exemplo a determinação principal do logaritmo e a determinação principal da raíz quadrada.

4 Funções Holomorfas

4.1 Primeiras definições

Definição 4.1.1 *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função da variável complexa e z_0 um ponto interior de U.*
Se o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existir, f diz-se **$\mathbb{C}$-derivável** *em z_0 e denota-se por*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

a **derivada** *de f em z_0.*

Esta condição é naturalmente equivalente à existência do limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_o + h) - f(z_o)}{h}$.
Apesar de f poder ser vista como função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, este limite apenas faz sentido em $\mathbb{C}$ uma vez que se divide por $z - z_0$. É no entanto natural perguntarmo-nos qual a relação entre a $\mathbb{C}$-diferenciabilidade e a diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}^2$ estudada em Análise Matemática 2. Trataremos este assunto no parágrafo seguinte. Tal como acontece no caso de funções reais da variável real,

Propriedade 4.1.2

$$f \quad \mathbb{C}\text{-derivável em } z_0 \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ é contínua em } z_0.$$

Prova:

Basta observar que $f(z_0 + h) = f(z_0) + hf'(z_0) + h\epsilon(h)$, onde $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$. ■

Por serem em tudo análogas ao caso das funções reais da variável real, omitimos a prova das seguintes propriedades:

Propriedade 4.1.3 *Sejam f, g $\mathbb{C}$-deriváveis em z_0.*

1. *Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, λf é $\mathbb{C}$-derivável em z_0 e $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$.*

2. $f+g$ *é* $\mathbb{C}$*-derivável em* z_0 *e* $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.

3. fg *é* $\mathbb{C}$*-derivável em* z_0 *e* $(fg)'(z_0) = f'(z_o)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

4. *Se* $g(z_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ *é* $\mathbb{C}$*-derivável em* z_0 *e* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$.

5. *Se* h *é é* $\mathbb{C}$*-derivável em* $f(z_0)$, $h \circ f$ *é* $\mathbb{C}$*-derivável em* z_0 *e* $(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0))f'(z_0)$.

Definição 4.1.4 *Seja* Ω *um aberto de* $\mathbb{C}$*. Se, para todo* $z_o \in \Omega$, f *é* $\mathbb{C}$*-derivável em* z_o, f *é diz-se* **holomorfa** *em* Ω.

Denota-se por $\mathcal{H}(\Omega)$ *o conjunto das funções holomorfas em* Ω.

Alguns exemplos:

1. Seja $f : z \to z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Tem-se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
   De facto,

$$(z+h)^n = z^n + nhz^{n-1} + h^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k z^k h^{n-k} = z^n + nhz^{n-1} + h\epsilon(h),$$

   onde $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$. Então,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = nz^{n-1},$$

   ou seja,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f'(z) = nz^{n-1}.$$

2. Seja $g : z \to \dfrac{1}{z}$. Tem-se $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$. Com efeito, para $z \neq 0$,

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = -\frac{z - (z+h)}{h(z+h)z} = -\frac{1}{(z+h)z},$$

   de onde se conclui que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad g'(z) = -\frac{1}{z^2}.$$

3. Resulta destes exemplos que para $n \in \mathbb{N}$ a função $h(z) = z^{-n}$ é holomorfa em $\mathbb{C}^*$.
   Observando que $h = g \circ f$, h é holomorfa em todo $z \neq 0$ e

$$h'(z) = g'(f(z))f'(z) = -\frac{1}{z^{2n}} nz^{n-1} = -nz^{-n-1}.$$

4.2 $\mathbb{C}$-derivabilidade e diferenciabilidade em $\mathbb{R}^2$

Seja $f : \Omega \subset\rightarrow \mathbb{C}$ uma função da variável complexa.

Retomamos as notações introduzidas anteriormente para as funções parte real e parte imaginária de f:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= Re(f(x+iy)) \\ v(x,y) &= Im(f(x+iy)), \end{aligned}$$

isto é,

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Caso as derivadas de primeira ordem de u e v existam num dado ponto (x,y), definimos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) := \lim_{h_1 \to 0} \frac{f((x+h_1)+iy) - f(x+iy)}{h_1} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) := \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x+i(y+h_2)) - f(x+iy)}{h_2} = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y),$$

$h_1, h_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.2.1 *Seja* $\Omega = \mathbb{C}^*$ *e* $f(z) = \frac{1}{z}$. *Tem-se*

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = u(x,y) + iv(x,y).$$

Tem-se então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Neste exemplo, observe-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Observe-se ainda que

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} = -\frac{\overline{z}^2}{|z|^2} = -\frac{x^2-2ixy-y^2}{x^2+y^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Tratam-se de igualdades gerais a todas as funções **$\mathbb{C}$-diferenciáveis**:

Propriedade 4.2.2 *Seja* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *e* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *(*$x_0, y_0 \in \mathbb{R}$*) um ponto interior a* Ω*. Então, se* f *é* $\mathbb{C}$*-derivável em* z*,* f *admite derivadas parciais em ordem a* x *e a* y *no ponto* z *e verifica-se a* **condição de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0$$

Também,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Prova:

Para $h = h_1 + ih_2$, $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h_1+ih_2\to 0}\frac{f(x+h_1+i(y+h_2)) - f(x+iy)}{h_1+ih_2} \quad \text{existe.}$$

Em particular, se $h_2 = 0$,

$$f'(z) = \lim_{h_1\to 0}\frac{f(x+h_1+iy) - f(x+iy)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$$

e, se $h_1 = 0$,

$$f'(z) = \lim_{h_2\to 0}\frac{f(x+i(y+h_2)) - f(x+iy)}{ih_2} = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

■

O facto de f verificar a condição de Cauchy-Riemann num dado ponto z não é suficiente para que f seja $\mathbb{C}$-diferenciável em z. É necessária mais uma condição, ligada à $\mathbb{R}^2$-diferenciabilidade de f. Como já referimos, f pode ser vista como uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Apesar de alguma redundância, com o objectivo de distinguirmos correctamente estes dois pontos de vista sobre f, vamos introduzir, dada uma função

$$f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

o conjunto $\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Omega\}$ e a função F

$$\begin{array}{llll} F : & \tilde{\Omega} & \to & \mathbb{C} \\ & (x,y) & \hookrightarrow & (u(x,y), v(x,y)). \end{array}$$

A função F é a função f do ponto de vista de $\mathbb{R}^2$.
Temos o seguinte teorema fundamental:

Teorema 4.2.3 *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $z = x + iy$ um ponto interior a Ω, $x, y \in \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f é $\mathbb{C}$-diferenciável em z;*

2. *F é $\mathbb{R}^2$-diferenciável no ponto (x, y) e*
$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0;$$

3. *$u = Re(f)$ e $v = Im(f)$ são $\mathbb{R}^2$-diferenciáveis no ponto (x, y) e*
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y).\end{aligned}$$

Prova :

$(2) \Leftrightarrow (3)$**:**

Por definição, F é $\mathbb{R}^2$-diferenciável se e só se as funções u e v o são. Por outro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y}(z) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right) + i\left(i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(z)\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \wedge \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

$(1) \Leftrightarrow (2)$**:**

Já vimos que se f é $\mathbb{C}$-diferenciável em z,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0.$$

Basta pois provarmos, com esta hipótese, a equivalência entre $\mathbb{C}$-diferenciabilidade de f e $\mathbb{R}^2$-diferenciabilidade de F.

F é $\mathbb{R}^2$-diferenciável no ponto (x, y)

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad u \text{ e } v \text{ são } \mathbb{R}^2\text{-diferenciáveis no ponto } (x,y)\\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y)-h_1\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)-h_2\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)=0\\
&\qquad \wedge \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(v(x+h_1,v+h_2)-v(x,y)-h_1\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)-h_2\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{(h_1+ih_2)\to 0} \frac{1}{|h|}\left(f(x+h_1+i(y+h_2))-f(z)-h_1\frac{\partial f}{\partial x}(z)-h_2\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{(h_1+ih_2)\to 0} \frac{1}{|h|}\left(f(x+h_1+i(y+h_2))-f(z)-h_1\frac{\partial f}{\partial x}(z)-ih_2\frac{\partial f}{\partial x}(z)\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{(h_1+ih_2)\to 0} \frac{1}{|h|}\left(f(x+h_1+i(y+h_2))-f(z)-h\frac{\partial f}{\partial x}(z)\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{(h_1+ih_2)\to 0} \frac{h}{|h|}\left(\frac{f(x+h_1+i(y+h_2))-f(z)}{h}-\frac{\partial f}{\partial x}(z)\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{(h_1+ih_2)\to 0} \frac{f(x+h_1+i(y+h_2))-f(z)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}(z),
\end{aligned}
$$

pelo que f é $\mathbb{C}$-diferenciável em z.

Inversamente, se z é $\mathbb{C}$-diferenciável em z, já vimos que

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z),$$

pelo que as equivalências anteriores mostram a $\mathbb{R}^2$ diferenciabilidade de F. ■

Na disciplina de Análise Matemática 2, vimos que se uma dada função F é de classe C^1 num aberto Ω, então F é diferenciável em Ω. Essa observação fornece o seguinte corolário:

Corolário 4.2.4 *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω aberto. Se $u = Re(f), v = Im(f) \in C^1(\Omega)$,*

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \;\Leftrightarrow\; \forall z \in \Omega, \quad , \frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0.$$

4.3 Aplicação às funções elementares

Propriedade 4.3.1 ,
As funções exponencial, co-seno, seno, co-seno hiperbólico e seno hiperbólico são holomorfas em $\mathbb{C}$ *e, para todo* $z \in \mathbb{C}$,

1. $\exp'(z) = \exp(z)$;
2. $\cos'(z) = -\sin(z)$;
3. $\sin'(z) = \cos'(z)$;
4. $\cosh'(z) = \sinh(z)$;
5. $\sinh'(z) = \cosh(z)$.

Prova:

Para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$u(x,y) = Re(e^{x+iy}) = e^x \cos(y) \qquad \text{e} \qquad u(x,y) = Im(e^{x+iy}) = e^x \sin(y).$$

Assim, u e v são de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.
Por outro lado, verifica-se a condição de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{x+iy} + i \frac{\partial}{\partial y} e^{x+iy} = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) + i(-e^x \sin(y) + ie^x \cos(y)) = 0.$$

Logo, a função exponencial é holomorfa em $\mathbb{C}$.

As restantes afirmações resultam das propriedades de soma e composição de funções $\mathbb{C}$-diferenciáveis. Por exemplo,

$$\cos'(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = \frac{1}{2i}(-e^{iz} + e^{-iz}) = -\sin(z).$$

■

Antes de passarmos à holomorfia de funções inversas, vejamos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.2 *Sejam* $A, B \subset \mathbb{C}$ *dois abertos do plano complexo e*

$$\theta : A \to B$$

holomorfa em A, bijectiva e tal que $\forall w \in A, \quad \theta'(w) \neq 0$.

Então, se θ^{-1} é contínua em B, θ^{-1} é holomorfa em B, e

$$\forall z \in B \ , \ (\theta^{-1})'(z) = \frac{1}{\theta'(\theta^{-1}(z))}.$$

A função θ é então dita **bi-holomorfa**.

Prova :

Sejam $z, \tilde{z} \in B$ com $z \neq \tilde{z}$ e $w = \theta^{-1}(z)$, $\tilde{w} = \theta^{-1}(\tilde{z})$.
Então,

$$\frac{\theta^{-1}(z) - \theta^{-1}(\tilde{z})}{z - \tilde{z}} = \frac{w - \tilde{w}}{\theta(w) - \theta(\tilde{w})} = \frac{1}{\frac{\theta(w)-\theta(\tilde{w})}{w-\tilde{w}}}.$$

(Note-se que $\theta(w) - \theta(\tilde{w}) \neq 0$ se $w \neq \tilde{w}$.)

Pela continuidade de θ^{-1}, se $z \to \tilde{z}$, $w \to w'$. Assim,

$$\left(\theta^{-1}\right)'(z) = \lim_{\tilde{z} \to z} \frac{\theta^{-1}(z) - \theta^{-1}(\tilde{z})}{z - \tilde{z}} = \lim_{\tilde{w} \to w} \frac{1}{\frac{\theta(w)-\theta(\tilde{w})}{w-\tilde{w}}} = \frac{1}{\theta'(w)} = \frac{1}{\theta'(\theta^{-1}(z))}.$$

■

Como corolário, obtemos a holomorfia da determinação principal do logaritmo:

Corolário 4.3.3 *A função*

$$Log \ : \ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \quad \to \quad \mathbb{C}$$

é holomorfa no seu domínio e tem-se para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$

$$Log'(z) = \frac{1}{z}.$$

De maneira mais geral,

$$Log_\phi \ : \ z \in \mathbb{C} \setminus R_\phi \quad \to \quad \mathbb{C}$$

é holomorfa no seu domínio e para todo $z \in \mathbb{C} \setminus R_\phi$,

$$Log_\phi'(z) = \frac{1}{z}.$$

Prova:

Vimos que Log é contínua e que se trata da bijecção recíproca da restrição da função exponencial à banda

$$A = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < Im(z) < \pi\}.$$

Pelo terorema anterior, $Log \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$ e

$$Log'(z) = \frac{1}{\exp'(Log(z))} = \frac{1}{z}.$$

Estas considerações permanecem obviamente válidas para qualquer outro ramo do logaritmo. ■

Mais atrás definimos a função multivaluada arcsin que se encontra definida por

$$\arcsin(z) = -ilog\left(iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Podemos definir um função fixando um ramo do logaritmo e um ramo da função raíz quadrada, por exemplo,

$$\arcsin(z) = -iLog\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right).$$

Trata-se, no seu domínio, de uma função contínua, de bijecção inversa sin. Assim,

Propriedade 4.3.4 *A função*

$$\arcsin(z) = -iLog\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

é holomorfa no interior do seu domínio e tem-se nesse conjunto

$$\arcsin'(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

De facto,

$$\begin{aligned}\arcsin'(z) &= -i\frac{(iz+\sqrt{1-z^2})'}{iz+\sqrt{1-z^2}} = -i\frac{(iz+e^{\frac{i}{2}(Log(1-z^2))})'}{iz+\sqrt{1-z^2}} = -i\frac{i - z\frac{1}{1-z^2}\sqrt{1-z^2}}{iz+\sqrt{1-z^2}} = \\ &= \frac{1}{iz+\sqrt{1-z^2}}\left(1+\frac{zi}{\sqrt{1-z^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.\end{aligned}$$

Note-se que pela Propriedade 4.3.3, este cálculo permanece válido para outras escolhas do ramos do logaritmo que aparecem na definição de arcsin. ■

Da mesma forma,

Propriedade 4.3.5 *A função*

$$\arccos(z) = Log\left(z + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

é holomorfa no interior do seu domínio Ω *e tem-se nesse conjunto*

$$\arccos'(z) = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

4.4 Operadores formais

Consideremos uma função $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
Como vimos, f pode ser vista como uma função de $x = Re(z)$ e $y = Im(z)$:

$$f(x + iy) = F(x, y) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Por sua vez, podemos escrever x e y em função de z e de $\overline{z}$:

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad\qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Desta forma, podemos considerar f como função de z e $\overline{z}$:

$$f(z, \overline{z}) = u\left(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\right).$$

Admitindo que todas as derivadas parciais de primeira ordem existem, o teorema de derivação da função composta fornece formalmente no ponto $(z, \overline{z})$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Podemos ainda escrever esta igualdade na forma

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Cálculos análogos fornecem igualmente

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Estes cálculos levam-nos à seguinte definição:

Definição 4.4.1 *Seja* Ω *aberto e* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *uma função diferenciável no sentido de* $\mathbb{R}^2$. *Define-se então os operadores*

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad e \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Observe-se que:

- f verifica a condição de Cauchy-Riemann se e só se $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.
- Se f é $\mathbb{R}^2$- diferenciável em Ω e se $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Nesse caso,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right) = f'(z).$$

Moralmente, este resultado significa que uma função holomorfa é uma função que, quando escrita na base $(z, \overline{z})$, não depende de $\overline{z}$. Nessa situação, a derivada partial $\dfrac{\partial}{\partial z}$ coincide com a derivação complexa usual das funções holomorfas.

5 Séries de números complexos

5.1 Sucessões de números complexas

Seja E um qualquer conjunto. Uma **sucessão de** E é simplesmente uma função

$$u : \mathbb{N} \to E.$$

Tradicionalmente, o valor de u em $n \in \mathbb{N}$ é denotado $u(n) = u_n$ e a função u é referida por

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Assim,

Definição 5.1.1 *Uma sucessão complexa é uma função*

$$\begin{cases} z : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ & n & \to & z_n \end{cases}$$

A partir de uma sucessão complexa, podemos definir de maneira natural as sucessões (reais) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcll} u_n & = & Re(z_n) & \text{(sucessão das partes reais)} \\ v_n & = & Im(z_n) & \text{(sucessão das partes imaginárias).} \end{array}$$

Exemplo:

Consideremos a sucessão geométrica dada pelo termo geral

$$z_n = \left(\frac{1+i}{3}\right)^n.$$

Vamos calcular o termos geral das sucessões $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Observando que

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \left(\frac{1+i}{3}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n e^{in\frac{\pi}{4}} :$$

$$\begin{cases} u_n = Re(z_n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right); \\ \\ v_n = Im(z_n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right). \end{cases}$$

5.2 Convergência de sucessões

Seja um conjunto E munido de uma distância d. Para traduzir a ideia intuitiva de que os termos de uma dada sucessão de elementos de E se "aproximam indefinidamente" de um certo valor $l \in E$, recorremos à seguinte definição :

Definição 5.2.1 *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de E. Diz-se que $l \in E$ é o* **limite** *da sucessão u se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow d(l, u_n) < \epsilon.$$

Denota-se então

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

Assim, se $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão complexa e $l \in \mathbb{C}$, diz-se que l é o limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |z_n - l| < \epsilon.$$

Tal como já foi observado nos capítulos anteriores, de um ponto de vista topológico, $\mathbb{C}$ é uma cópia de $\mathbb{R}^2$. Desta forma, as seguintes propriedades são consequências imediatas das propriedades das sucessões do plano, estudadas em Análise Matemática 2D.

Teorema 5.2.2 *Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão complexa.*

Então

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge (em } \mathbb{C})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$u_n = Re(z_n) \text{ e } v_n = Im(z_n) \text{ são convergentes (em } \mathbb{R}\text{).}$$

Temos então

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + i \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Definição 5.2.3 *Seja* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão complexa. Diz-se que* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada se*

$$\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ |z_n| \leq M.$$

Propriedade 5.2.4 *Toda sucessão complexa convergente é limitada.*

Propriedade 5.2.5 *Sejam* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sucessões complexas convergentes. Então,*

1. *A sucessão* $(z_n + z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente e*

$$\lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} z'_n;$$

2. *A sucessão* $(z_n z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente e*

$$\lim_{n\to\infty}(z_n z'_n) = \left(\lim_{n\to\infty} z_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} z'_n\right).$$

3. *Se* $\lim_{n\to+\infty}(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq 0$, $\left(\frac{z_n}{z'_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge e*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z'_n} = \frac{l}{l'}.$$

5.3 Séries complexas

Neste capítulo vamos introduzir a noção de série para os números complexos. Os conceitos e definições apresentadas são em tudo análogas ao caso das séries reais estudadas em Análise Matemática 2D.

Definição 5.3.1 *Seja* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de números complexos. Define-se a sucessão das somas parciais* $(S_N)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *por*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n.$$

- *Se* $(S_N)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão convergente:*
  Diz-se que a série $\sum z_n$ *converge e chama-se* **soma da série** $\sum z_n$ *ao limite*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n := \lim_{N\to+\infty} S_N.$$

- *Se* $(S_N)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão divergente, diz-se que a série* $\sum z_n$ *é* **divergente.**

Exemplo: Séries geométricas
Seja $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$.

Considera-se a **sucessão geométrica de razão** z **e primeiro termo** $a \in \mathbb{C}$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ z_n = az^{n-1}.$$

A que condição a série correspondente converge ?

Exactamente como no caso das sucessões geométricas reais, é possivel calcular explicitamente o termo geral de S_N :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_N = \sum_{n=1}^{N} az^{n-1} = a\frac{1-z^N}{1-z}.$$

É fácil observar que a sucessão de termo geral z^n converge se e só se $|z| < 1$. Neste caso, o limite desta sucessão é nulo. Assim,

- se $|z| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} az^{n-1} = \frac{a}{1-z}.$$

- se $|z| \geq 1$ (e $a \neq 0$), a série

$$\sum az^{n-1} \text{ diverge.}$$

5.3.1 Propriedades elementares das séries complexas

Propriedade 5.3.2 *Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão complexa.*
Então :

$$\sum z_n \textit{ converge} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} z_n = 0.$$

Prova :

Seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão das somas parciais, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = l \in \mathbb{C}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ z_{n+1} = S_{n+1} - S_n.$$

Tem-se $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, visto $(S_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ser uma sub-sucessão de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Logo

$$\lim_{n\to+\infty} z_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} z_n = 0.$$

■

Se o limite da sucessão de termo geral z_n for não nulo (ou não existir), então a série $\sum z_n$ diverge.
Neste caso, a série é dita **grosseiramente divergente**.

Propriedade 5.3.3 *Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números complexos, $u_n = Re(z_n)$ e $v_n = Im(z_n)$.*
Então,

$$\sum z_n \textit{ converge (em } \mathbb{C}) \Leftrightarrow \sum u_n \textit{ e } \sum v_n \textit{ convergem (em } \mathbb{R}).$$

Nesse caso,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + i \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.$$

A prova deste resultado é trivial. Basta observar o Teorema 5.2.2 e raciocinar em termos de somas parciais.

Definição 5.3.4 *Diz-se que a série* $\sum z_n$ *é* **absolutamente convergente** *se convergir em módulo, i.e., se a série* $\sum |z_n|$ *for convergente.*

Tal como no caso real,

Propriedade 5.3.5

$$\sum |z_n| \text{ converge } \Rightarrow \sum z_n \text{ converge.}$$

Se $\sum z_n$ *for convergente e* $\sum |z_n|$ *for divergente, a série é dita semi-convergente.*

Prova:

Basta observar que $|u_n| = |Re(z_n)| \leq |z_n|$ e $|v_n| = |Im(z_n)| \leq |z_n|$. Pelo primeiro critério de comparação para séries de termos positivos, $\sum |u_n|$ e $\sum |v_n|$ convergem, logo, por um teorema de Análise Matemática 2, $\sum u_n$ e $\sum v_n$ convergem. Pela Propriedade 5.3.3, $\sum z_n$ é convergente. ■

5.3.2 Séries de funções

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma **sucessão de funções** de domínio $U \subset \mathbb{C}$. Podemos considerar a soma parcial de funções dada por

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n.$$

Atenção : S_N é agora uma função. É definida por :

$$\forall z \in U \ , \ S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z).$$

Podemos formular uma grande quantidade de perguntas interessantes :

1. Que sentido dar a "$\lim\limits_{N\to\infty} S_N$" ?

   No caso de podermos escrever algo como "$f = \lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$" :

2. A continuidade das funções f_n implica a continuidade de f?

3. Se cada f_n é holomorfa, f é holomorfa ? Nesse caso como calcular f' ?

Na realidade, há uma "hierarquia" de noções de convergência de séries de funções:

Definição 5.3.6 - Convergência Pontual
Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções de domínio $U \subset \mathbb{C}$.
Se, para todo $z \in U$, a série complexa $\sum f_n(z)$ é convergente, diz-se que a série $\sum f_n$ **converge pontualmente**.
Denotando a sua soma em cada ponto $z \in U$ por

$$f(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z),$$

fica definida uma função $f : U \to \mathbb{C}$. A função f é dita a soma da série $\sum f_n$.

Tem-se portanto:

$$\sum f_n \text{ converge pontualmente para } f \text{ em } U$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall z \in U, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(z) - f(z) \right| < \epsilon.$$

Exemplo:
Seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(z) = e^z|z|^{n-1}(1-|z|)$ definidas no disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.
Tem-se, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z) = \sum_{n=1}^{N} e^z|z|^{n-1}(1-|z|) = \sum_{n=1}^{N} e^z\left(|z|^{n-1} - |z|^n\right) = e^z\left(1-|z|^N\right).$$

A sucessão complexa $S_N(z) = e^z\left(1-|z|^N\right)$ converge para todo $z \in D$:

1. Se $|z| < 1$, $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(z) = e^z$.
2. Se $|z| = 1$, $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(z) = 0$.

Assim, a série de funções $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função f definida em D por

$$f(z) = \begin{cases} e^z & \text{se } |z| < 1; \\ 0 & \text{se } |z| = 1. \end{cases}$$

Observe-se que a função limite não é contínua, apesar de cada S_n ser contínua. A noção de limite pontual de séries de funções parece ser pouco útil.
Para garantir a preservação da continuidade, assim como de outras propriedades interessantes, temos que definir outra noção de convergência um pouco mais forte. Invertendo a ordem dos quantificadores:

Definição 5.3.7 - Convergência Uniforme
Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções de domínio $U \subset \mathbb{C}$.
Diz-se que a série $\sum f_n$ **converge uniformemente para f em U** *se*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in U, \quad n \geq N \Rightarrow |\sum_{n=1}^{N} f_n(z) - f(z)| = |S_N(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Ou seja, dizer que a série $\sum f_n$ converge uniformemente para f é dizer que, dado ϵ, se consegue escolher uma ordem $N \in \mathbb{N}$ válida para **todos** os pontos z de U, a partir da qual a distância de $S_N(z)$ a $f(z)$ é inferior a ϵ.

Esta noção de convergência já é mais interessante, visto termos o seguinte resultado:

Teorema 5.3.8 *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções definidas num conjunto $U \subset \mathbb{C}$, tal que $\sum f_n$* **converge uniformemente** *para f.*
Então :

- *Se, para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n é contínua em U, f é contínua em U.*
- *Se, para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n é holomorfa em $\Omega = int(U)$, então f_n é holomorfa em Ω e tem-se*

$$\forall z \in \Omega, \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(z).$$

Prova :

Provamos apenas o primeiro ponto. Seja $z_0 \in U$. Para $z \in U$, e $N \in \mathbb{N}$:

$$f(z) - f(z_o) = \left(f(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z)\right) + \left(\sum_{n=1}^{N} f_n(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z_0)\right) + \left(\sum_{n=1}^{N} f_n(z_0) - f(z_0)\right).$$

Utilizando a desigualdade triangular,

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \left|f(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z)\right| + \left|\sum_{n=1}^{N} f_n(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z_0)\right| + \left|\sum_{n=1}^{N} f_n(z_0) - f(z_0)\right|.$$

Seja $\epsilon > 0$.
A convergência sendo uniforme,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in U, \quad \left| f(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z) \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por outro lado, a função $z \to \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$é contínua (soma finita de funções contínuas), pelo que

$$\exists \delta > 0, \quad \forall z \in U, \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z_0) \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim, para $|z - z_0| < \delta$,

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

e a função f é contínua. ■

Na prática, não é muito fácil estabelecer que uma série de funções converge uniformemente. Neste sentido, o seguinte critério é particularmente útil:

Propriedade 5.3.9 - Critério de Weierstrass (Convergência normal)

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções definidas num conjunto $U \subset \mathbb{C}$. Se existir uma sucessão $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reais positivos tais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in U, \quad |f_n(z)| \leq M_n \text{ e } \sum M_n \text{ é convergente,}$$

então $\sum f_n$ converge uniformemente para uma certa função f.

Prova :
Seja $z \in U$. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(z)| \leq M_n.$$

Logo, pelo critério de comparação para séries de termos positivos, $\sum f_n(z)$ é absolutamente convergente. Seja então

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

a soma (pontual) da série $\sum f_n$.
Provamos agora que a convergência é uniforme :

$$\forall z \in U, \quad \left| f(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} M_n.$$

A série $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$ sendo a série resto de uma série convergente, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} M_n = 0$. Fixando $\epsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \sum_{n=N+1}^{+\infty} M_n < \epsilon :$$

$$\forall z \in U, \quad \forall n \geq N, \quad \left| f(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} M_n < \epsilon,$$

e a convergência é uniforme. ■

Exemplo:

Consideremos a sucessão definida por $f_n(z) = z^n$ definida no disco $D_{\frac{1}{2}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$.
Tratando-se de uma série geométrica de razão z, com $|z| < 1$, sabemos que se tem a convergência pontual

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

Para $z \in D_{\frac{1}{2}}$, $|f_n(z)| = |z|^n = \dfrac{1}{2^n}$.
$\sum \dfrac{1}{2^n}$ é uma série convergente, pelo critério de Weierstrass a convergência é uniforme em $D_{\frac{1}{2}}$.
Assim, no interior de $D_{\frac{1}{2}}$ temos

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1},$$

ou seja,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}.$$

Observando que este raciocínio pode ser feito em qualquer disco $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $R < 1$, esta fórmula é válida no interior de D_1. Assim, para $|z| < 1$,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}.$$

5.3.3 Séries inteiras

Definição 5.3.10 *Uma série inteira (ou série de potências) é uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

onde $z_0 \in \mathbb{C}$ *e* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão complexa.*

No âmbito das séries inteiras, utilizaremos a convenção $0^0 = 1$. É relativamente fácil analisar em que pontos converge ou diverge este tipo de série de funções. Comecemos por observar a seguinte propriedade:

Propriedade 5.3.11 *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *uma série inteira.*

Se a série converge num dado ponto $z = z_1$ *então converge absolutamente em todos os pontos do disco aberto centrado em* z_0 *e de raio* $|z_0 - z_1|$.

Prova:

Tem-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n (z_1-z_0)^n.$$

Uma vez que a série converge no ponto $z = z_1$, tem-se em particular

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(z_1-z_0)^n = 0.$$

Logo, a sucessão de termo geral $a_n(z_1-z_0)^n$ é limitada: existe $M \geq 0$ tal que para todo n,

$$|a_n(z_1-z_0)^n| \leq M.$$

Tomando z no disco aberto centrado em z_0 e de raio $|z_0 - z_1|$, $\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| = r < 1.$. Finalmente,

$$\left|a_n \left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n (z_1-z_0)^n\right| \leq Mr^n.$$

A série geométrica $\sum Mr^n$ é convergente, pelo que pelo primeiro critério de comparação $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ é absolutamente convergente. ■.

Esta propriedade sugere que haverá um "disco máximo" para a convergência de uma série inteira. A próxima definição, como veremos mais adiante, formece o raio desse disco:

Definição 5.3.12 *Seja* $\sum a_n(z-z_0)^n$ *uma série inteira. Define-se então*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)} \qquad\qquad R = +\infty \text{ se } \overline{\lim}\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 0)$$

o seu **raio de convergência.**
O disco $D_{z_0}(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ *é então chamado* **disco de convergência** *(*$D_{z_0}(+\infty) = \mathbb{C}$*).*

Aqui, $\overline{\lim}\, x_n$ designa o limite superior da sucessão de termo geral x_n, ou seja, o maior sublimite desta sucessão. O limite superior de uma sucessão existe sempre (eventualmente igual a $+\infty$).

Exemplos:

- $x_n = (-1)^n$.
  Esta sucessão possui dois sublimites, 1 e -1, pelo que
  $$\overline{\lim}\, x_n = 1.$$
- $x_n = n$.
  $$\overline{\lim}\, x_n = +\infty.$$
- Se a sucessão de termo geral x_n for convergente, possui um único sublimite (o seu limite). Assim, nesse caso,
  $$\overline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Na disciplina de Análise Matemática 2 estudámos o critério da raíz de Cauchy. Na realidade existe uma versão ligeiramente mais geral que será bastante útil no estudo da convergência das séries inteiras:

Teorema 5.3.13 - Critério da raíz de Cauchy
Seja $\sum x_n$ *uma série de termos positivos.*

- *Se* $\overline{\lim}\left(\sqrt[n]{x_n}\right) < 1$, $\sum x_n$ *converge.*
- *Se* $\overline{\lim}\left(\sqrt[n]{x_n}\right) > 1$, $\sum x_n$ *diverge.*

Enunciamos agora o teorema central que descreve o comportamento das séries inteiras:

Teorema 5.3.14 - *Convergência das séries inteiras*

Seja $\sum a_n(z-z_0)^n$ *uma série inteira,* R *o seu raio de convergência e* $D = D_{z_0}(R)$ *o seu disco de convergência. Então,*

- *Em termos de convergência pontual,* $\sum a_n(z-z_o)^n$ *converge absolutamente se* $|z-z_o|<R$ *(i.e.* $z\in D$*), e diverge grosseiramente se* $|z-z_o|>R$*.*

- *A convergência é uniforme nos discos*

$$\overline{D}_{z_0}(R') = \{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|\le R'\}, \qquad R'<R.$$

Prova :

- Suponhamos que $|z-z_0| = R' < R$. Então, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$|a_n(z-z_0)|^n = |a_n||z-z_0|^n = |a_n|R'^n,$$

  i.e.,

$$(|a_n(z-z_o)|^n)^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}}R' = \left(R|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)\frac{R'}{R}:$$

$$\overline{\lim}\,(|a_n(z-z_o)|^n)^{\frac{1}{n}} = \frac{R'}{R}.$$

  Pelo critério da raíz , se $R'<R$, $\sum|a_n(z-z_0)^n|$ converge.
  Por outro lado, se $R'>R$, existe uma subsucessão v_n de $u_n = |a_n(z-z_o)|^n$ tal que $v_n\ge 1$ para n suficientemente grande: $\sum|a_n(z-z_0)^n|$ é grosseiramente divergente.

- A convergência é uniforme no disco $D_{z_o}(R')$ para $R'<R$:
  Com efeito, já vimos que para todo $z\in D_{z_o}(R')$,

$$\overline{\lim}(|a_n(z-z_o)|^n)^{\frac{1}{n}} = \frac{R'}{R} < 1.$$

  Seja $\epsilon>0$ tal que $\frac{R'}{R}+\epsilon<1$ e $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$n\ge N \Rightarrow (|a_n(z-z_o)|^n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{R'}{R}+\epsilon, \quad \text{ou seja,} \quad n\ge N\Rightarrow (|a_n(z-z_o)|^n) \le \left(\frac{R'}{R}+\epsilon\right)^n.$$

  A série numérica

$$\sum\left(\frac{R'}{R}+\epsilon\right)^n$$

  é convergente, logo pelo critério de Weierstrass $\sum a_n(z-z_o)^n$ converge uniformemente.■

Este resultado possui o seguinte corolário:

Corolário 5.3.15 *Seja* $\sum a_n(z-z_o)^n$ *uma série inteira e* R *o seu raio de convergência. Então a função definida por*

$$\forall z \in D_{z_o}(R)\ ,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_o)^n$$

é holomorfa no disco de convergência e

$$\forall z \in D_{z_o}(R)\ ,\ f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n(z-z_o)^{n-1}.$$

Prova :

Basta combinar os Teoremas 5.3.8 e 5.3.14. ■

Na disciplina de Análise 1 vimos o seguinte resultado: dado uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termos estritamente positivos, se $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ então também existe $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$ e estes dois limites são iguais. Temos pois, em certas circunstâncias, um método mais simples para o cálculo do raio de convergência de uma série inteira:

Propriedade 5.3.16 *Seja* $\sum a_n(z-z_o)^n$ *uma série inteira.*
Se o limite $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_n}{a_{n+1}}|$ *existir é igual ao raio de convergência* R *de* $\sum a_n(z-z_0)^n$.

5.4 Funções analíticas

Definição 5.4.1 *Seja* $f:\Omega\to\mathbb{C}$, $\Omega\subset\mathbb{C}$ *aberto.*
Seja $z_0\in\Omega$.

A função f *diz-se* **analítica** *em* z_0 *se existir uma sucessão* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de números complexos e* $\rho>0$ *tal que*

$$\forall z \in D_{z_o}(\rho),\quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_o)^n.$$

(Em particular o raio de convergência de $\sum a_n(z-z_o)^n$ é não nulo.)
Diz-se que f é analítica em U se f é analítica em todos os pontos de Ω.

Exemplo :

Já vimos que

$$\forall z \in D_0(1), \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n,$$

pelo que $z \to \dfrac{1}{1-z}$ é analítica em $z_0 = 0$.

Propriedade 5.4.2 *Seja f analítica num aberto U. Então f é holomorfa em U.*

Prova :

Seja $z_o \in U$.
Então existe por definição $\rho > 0$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall z \in D_{z_o}(\rho), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Seja R o raio de convergência da série de potências $\sum a_n(z-z_o)^n$. Tem-se claramente $\rho \leq R$, pelo que $z \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_o)^n$ converge uniformemente em $D_{z_0}(\frac{\rho}{2})$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(z) = a_n(z-z_0)^n$ é holomorfa, pelo Teorema 5.3.8, f é holomorfa em $D_{z_0}(\frac{\rho}{2})$. Em particular, f é $\mathbb{C}$- derivável em z_0. Como esta conclusão é válida para todos os pontos de U, f é holomorfa nesse aberto. ∎

Propriedade 5.4.3 - Unicidade do desenvolvimento

Seja $f : U \to \mathbb{C}$ analítica em $z_0 \in U$. A sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifica

$$\forall z \in D_{z_0}(\rho), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

é única. Para mais, $f^{(n)}(z_0)$ *existe para todo* n *e tem-se*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Prova :

$$\forall z \in D_{z_o}(\rho), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Em particular, no ponto z_0,

$$f(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 - z_0)^n = a_o.$$

Para mais, f é holomorfa em $D_{z_0}(\rho)$, e já vimos que

$$\forall z \in D_{z_0}(\rho), \quad f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Logo,

$$f'(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (z_0 - z_0)^{n-1} = 1.a_1.$$

Argumentamos agora que f' é por sua vez holomorfa, e coincide com a série inteira

$$z \to \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

no disco $D_{z_0}(\rho)$.
O raio de convergência desta série sendo obviamente superior a ρ, podemos derivar termo a termo, e

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (z - z_0)^{n-2},$$

e

$$f''(z_0) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (z_0 - z_0)^{n-2} = 2! a_2.$$

O resultado pode então ser provado por uma indução trivial que omitimos. ■

Surpreendentemente, a implicação inversa é também verdadeira, embora a sua demonstração ultrapasse o âmbito deste curso:

Propriedade 5.4.4 *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto. Então*

$$f \text{ holomorfa em } U \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ analítica em } U.$$

Mais precisamente, se f é holomorfa em U, para todo $z_0 \in U$, f é analítica em z_0 e tem-se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

em todos os discos centrados em z_0 contidos em U.

Vemos aqui uma diferença fundamental entre a noção de diferenciabilidade em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$. Com efeito, o simples facto do limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existir em todos os pontos z_0 de um aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ implica automaticamente

- A continuidade de f' em Ω.
- A existência de $f^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ no aberto Ω e consequentemente a continuidade de $f^(n)$ em Ω.
- A convergência da série
$$\sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$
num disco centrado em z_0 e de raio não nulo. Esta série é dita a **série de Taylor de f centrada em z_0.**

Estas implicações são obviamente totalmente falsas em $\mathbb{R}$. Existem funções diferenciáveis num aberto de $\mathbb{R}$ cuja derivada nem sequer é contínua.

Exemplo:
A função exponencial é holomorfa em $\mathbb{C}$.
Calculemos a sua série (formal) de Taylor centrada em $z_0 = 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ (\exp)^{(n)}(0) = e^0 = 1,$$

onde denotámos por exp a função exponencial. Assim, a série de Taylor é dada por

$$\sum \frac{z^n}{n!}.$$

Pela Propriedade 5.4.4, a função exp coincide com a sua série de Taylor em todos os discos centrados em 0 que só contenham pontos de U.
Visto que $U = \mathbb{C}$, tem-se

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Da mesma forma, é fácil argumentar que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{e} \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

5.5 Funções harmónicas

5.5.1 Teorema do valor médio e princípio do máximo

Definição 5.5.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$.*
A função u diz-se harmónica em Ω se verificar para todo $(x, y) \in \Omega$ a equação de Laplace

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

O operador $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ diz-se o **Laplaciano**.

Moralmente, as funções harmónicas são as funções que num dado ponto (x_0, y_0) assumem a média dos valores tomados a uma distância fixa de (x_0, y_0). Mais precisamente,

Teorema 5.5.2 - Teorema do valor médio
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $X_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ e $R > 0$ tal que

$$D_R = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, d(X, X_0) \leq R) \subset \Omega.$$

Seja $\mathcal{C}_R = fr(D_R)$. Se u é harmónica em Ω,

$$u(X_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\mathcal{C_R}} u(s) ds.$$

Prova:

Parametrizando $\mathcal{C}_R$ pela função $\gamma : t \in [0; 2\pi] \to (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$,

$$\frac{1}{2\pi R}\oint_{\mathcal{C_R}} u(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))dt$$

Vamos mostrar que a função

$$A(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))dt$$

é constante:

$$A'(R) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} \left(R\cos(t)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t)) + R\sin(t)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))\right) dt.$$

Reconhecemos aqui a circulação do campo $F(x, y) = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ ao longo de $\mathcal{C}_R$, no sentido directo. Pelo teorema de Green,

$$A'(R) = \frac{1}{2\pi}\iint rot_{escalar} F dA = \iint \Delta(u) dA = 0.$$

Assim, A é uma função constante. Por outro lado,

$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{2\pi R}\oint_{\mathcal{C_R}} u(s)ds = \lim_{R\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(X_0) = u(X_0).$$

Logo, para todo R nas condições do teorema, $A(R) = u(X_0)$. ■

Este resultado possui o seguinte importante corolário:

Corolário 5.5.3 - Princípio do Máximo

Seja u harmónica num aberto Ω. Então, se Ω possui um extremo local num dado ponto $X_0 \in \Omega$, u é constante em Ω.

Em particular, se $F \subset \Omega$ é compacto, o máximo e o mínimo de u em F (que existem pelo teorema de Weierstrass) são atingidos na fronteira de F.

Prova:

Vamos supor que X_0 é um máximo local de u. Então, para R suficientemente pequeno, $u(X) < u(X_0)$ para todo $X \in \mathcal{C}_R$. Logo,

$$u(X_0) = \frac{1}{2\pi R}\oint_{\mathcal{C_R}} u(s)ds < \frac{1}{2\pi R}\oint_{\mathcal{C_R}} u(X_0)ds = u(X_0).$$

o que é absurdo. ■

5.5.2 Relação com as funções holomorfas

A relação entre funções holomorfas e funções harmónicas é a seguinte:

Teorema 5.5.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto do plano complexo e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa.*

Então $u = Re(f)$ e $v = Im(f)$ são harmónicas em $\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Omega\}$.

Prova:
Sendo f analítica em Ω, u e v são de classe $C^\infty(\tilde{\Omega})$. Para observar que se tratam de funções harmónicas, basta derivar em ordem a x e em ordem a y as condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

■

Este resultado possui uma recíproca cuja prova está fora do âmbito deste curso:

Teorema 5.5.5 *Seja Ω um aberto simplesmente conexo do plano complexo e u harmónica em $\tilde{\Omega}$. Então existe uma função v harmónica em $\tilde{\Omega}$ tal que*

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

é holomorfa em u. A função v, única a menos de constante aditiva, é dita **função harmónica conjugada** *de u.*

Naturalmente, este resultado permanece válido invertendo no enunciado os papeis da função u e da função v.