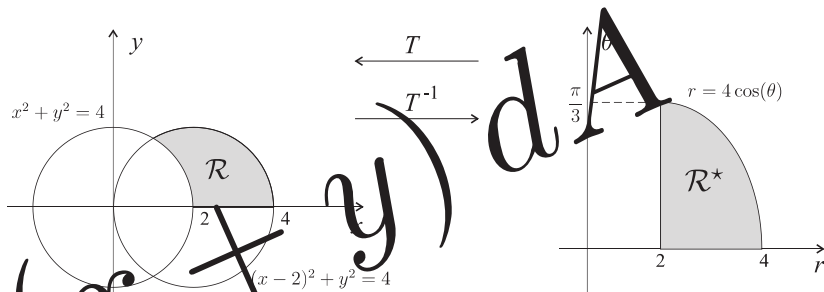


TEORIA E PRÁTICA CÁLCULO INTEGRAL EM \mathbb{R}^n

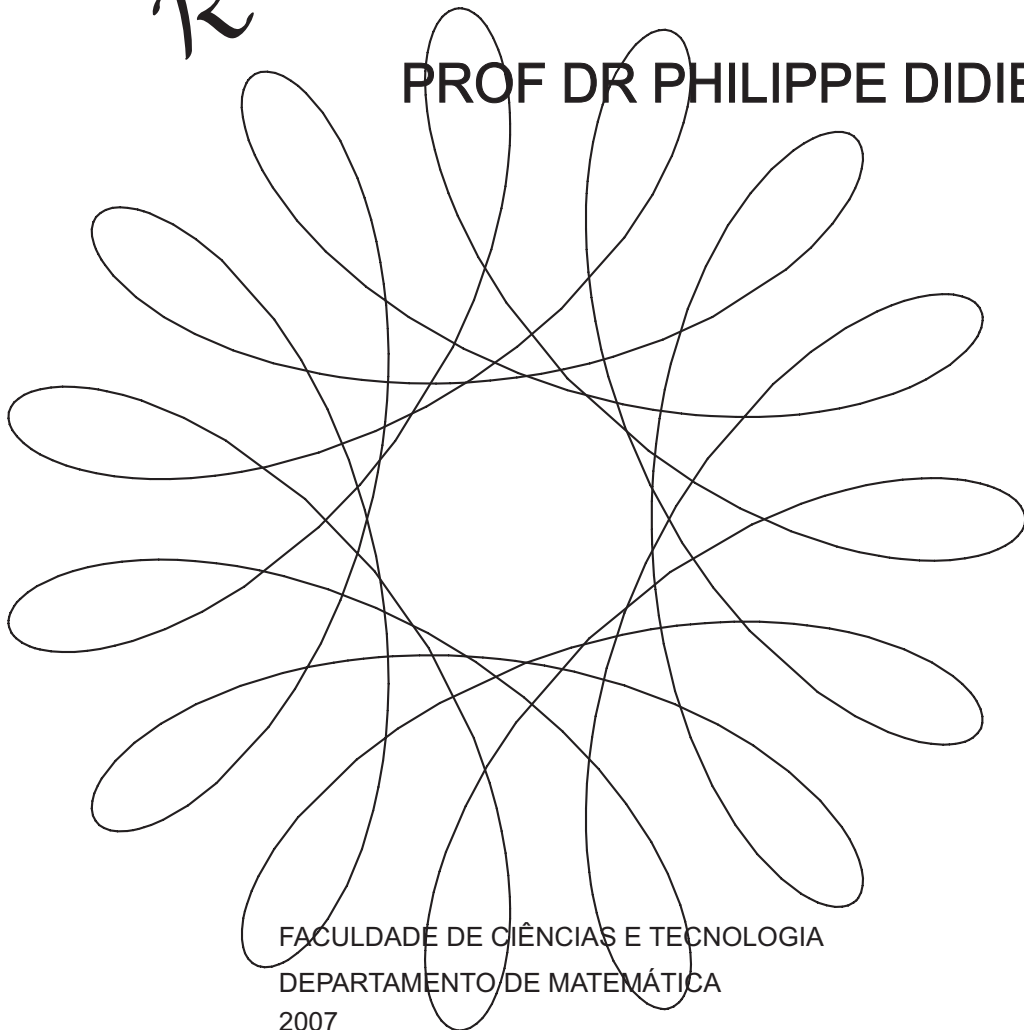


$\int_{\mathcal{R}}$

PROF^a DR^a ANA SÁ

PROF DR FILIPE OLIVEIRA

PROF DR PHILIPPE DIDIER



Índice

1	Cálculo integral em \mathbb{R}^n: Integrais duplos	1
1.1	Introdução	1
1.2	Integral duplo sobre domínios rectangulares	4
1.3	Integrais iterados	9
1.4	Teorema de Fubini. Aplicação do integral iterado ao cálculo de volumes.	11
1.5	Integrais duplos sobre domínios gerais	15
1.6	Conjuntos básicos	17
1.7	Mudança de variáveis	25
1.7.1	Mudança de variáveis em coordenadas polares	27
1.8	Exercícios Propostos	32
2	Integrais triplos	39
2.1	Integrais triplos em domínios paralelepípedicos	39
2.2	Teorema de Fubini e integral triplo iterado	42
2.3	Integrais triplos em domínios gerais	44
2.3.1	Conjuntos básicos de \mathbb{R}^3	45
2.3.2	Aplicação ao cálculo de volumes	50
2.4	Mudança de variável nos integrais triplos	53
2.4.1	Coordenadas cilíndricas	54
2.4.2	Coordenadas esféricas	58
2.5	Exercícios Propostos	63
3	Integrais de linha	65
3.1	Linhas em \mathbb{R}^n	65
3.1.1	Primeiras definições	65
3.1.2	Comprimento de uma linha - abcissa curvilínea	73
3.2	Integral Curvilíneo	81
3.2.1	Definição	81
3.2.2	Campos vectoriais	85
3.2.3	Integração de um campo vectorial	87
3.2.4	Campos de gradientes	90
3.3	Formas diferenciais	96
3.3.1	Formas diferenciais e campos vectoriais	97
3.4	Teorema de Green	98
3.5	Superfícies em \mathbb{R}^3	103

3.5.1	Integral de superfície	108
3.5.2	Fluxo de um campo de vetores	115
3.5.3	Teorema de Stokes	119
3.5.4	Teorema de Gauss	120
3.6	Exercícios Propostos	123
3.6.1	Linhas em \mathbb{R}^n . Coordenadas polares.	123
3.6.2	Integrais de linha.	125
3.6.3	Campos vectoriais.	126
3.6.4	Teorema de Green	128
3.6.5	Integrais de superfície	129

Capítulo 1

Cálculo integral em \mathbb{R}^n : Integrais duplos

1.1 Introdução

Definem-se os integrais múltiplos por meio de funções de várias variáveis e limites de somas de modo análogo ao caso do integral definido:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Vejamos, de forma breve, como se procede para definir integral de Riemann para funções reais de variável real. Começamos por definir partição de um intervalo de \mathbb{R} .

Definição 1.1.1 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dados $n + 2$ pontos*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = b,$$

*ao conjunto dos subintervalos da forma $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n$, chama-se **partição** de $[a, b]$.*

NOTAS:

1. A partição é um conjunto de subconjuntos, mais precisamente:

$$\mathcal{P} = \{[x_i, x_{i+1}] : i \in \mathbb{N}_0, 0 \leq i \leq n\}.$$

O nome partição resulta de $\cup_{i=0}^n [x_i, x_{i+1}] = [a, b]$ e do facto de dados dois quaisquer elementos de \mathcal{P} a sua intersecção ou é vazia ou se reduz a um ponto.

2. A partição \mathcal{P} fica bem definida pelo conjunto $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1} = b\}$ pelo que podemos identificar a partição \mathcal{P} com o conjunto P . Pelo modo como definimos a partição, consideramos o conjunto P ordenado, isto é, $x_i < x_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Definição 1.1.2 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e \mathcal{P} uma partição de $[a, b]$. Chama-se **soma inferior de Darboux** de f , relativa à partição \mathcal{P} a*

$$s_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

Chama-se **soma superior de Darboux** de f , relativa à partição \mathcal{P} a

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

NOTAS:

1. As somas superior e inferior estão bem definidas. Como f é limitada em $[a, b]$, f é limitada em $[x_i, x_{i+1}]$, isto é, o conjunto $\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ é limitado e, portanto, tem ínfimo e supremo.
2. É óbvio que $s_{\mathcal{P}}(f) \leq S_{\mathcal{P}}(f)$. Veremos que esta propriedade se pode generalizar: para uma função limitada em $[a, b]$, qualquer soma superior é maior ou igual a qualquer soma inferior.
3. Se f é uma função não negativa em $[a, b]$, dada uma partição \mathcal{P} , a soma inferior de Darboux é igual à soma das áreas dos rectângulos cujos lados têm comprimento $x_{i+1} - x_i$ e $\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ (ver Figura 1.1).

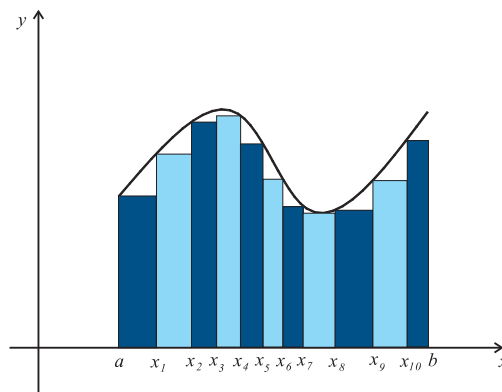


Figura 1.1 Soma inferior de Darboux.

Analogamente, a soma superior de Darboux é igual à soma das áreas dos rectângulos cujos lados têm comprimento $x_{i+1} - x_i$ e $\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ (ver Figura 1.2).

Resulta de várias propriedades das partições que se $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada, o conjunto das somas superiores é minorado (todas as somas inferiores são minorantes) e o conjunto das somas inferiores é majorado (todas as somas superiores são majorantes); estes conjuntos têm, pois, ínfimo e supremo, respectivamente.

Definição 1.1.3 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Ao ínfimo do conjunto das somas superiores de f chama-se **integral superior** de f em $[a, b]$ e representa-se por $\overline{\int_a^b} f(x) dx$. Ao supremo do conjunto das somas inferiores de f chama-se **integral inferior** de f em $[a, b]$ e representa-se por $\underline{\int_a^b} f(x) dx$. Se $\underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$, diz-se que f é **integrável à Riemann** em $[a, b]$; a este número chama-se **integral** de f em $[a, b]$ e representa-se $\int_a^b f(x) dx = \underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$.*

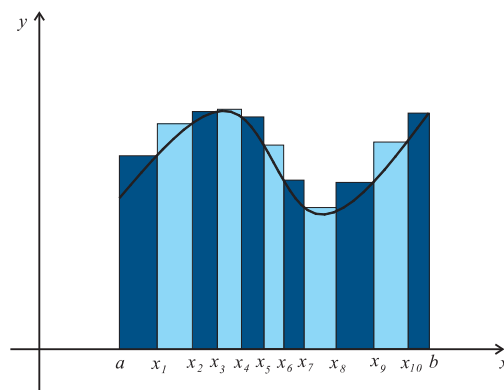


Figura 1.2 Soma superior de Darboux.

NOTAS:

1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. O integral superior de f em $[a, b]$ e o integral inferior de f em $[a, b]$ existem (ver nota antes da definição).
2. Se f é contínua, não negativa e integrável em $[a, b]$, o integral de f é igual à área da figura limitada pelo gráfico de f e pelas rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ (eixo dos xx) (ver Figura 1.3). Para nos convencermos deste facto, basta ter em conta as figuras 1.1 e 1.2 e a definição. O integral é o ínfimo do conjunto das somas superiores, que são todas maiores ou iguais que aquela área (ver Figura 1.2), portanto, o integral é maior ou igual que a área da figura referida. Por outro lado, o integral também é o supremo do conjunto das somas inferiores, que são todas menores ou iguais áquela área (ver Figura 1.1), portanto, o integral é menor ou igual que a área da figura referida. Conclui-se assim que o integral é igual à área da figura.

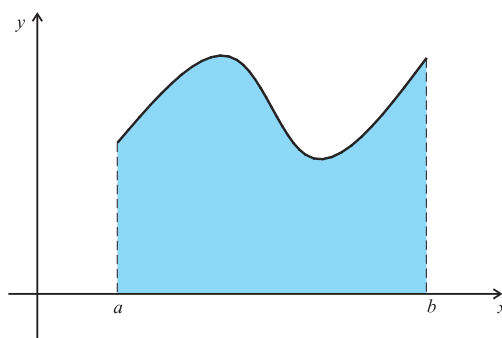


Figura 1.3 O integral é igual à área da figura indicada.

Seguiremos um caminho semelhante a este para definir integral de uma função de duas variáveis. A principal diferença reside no facto de em lugar de começarmos com uma partição do intervalo $[a, b]$, subdividimos um rectângulo R do plano, passando depois para conjuntos mais complexos. Os teoremas utilizados no cálculo baseiam-se em equações de curvas que constituem a fronteira desses conjuntos sendo pois mais complicados do que o teorema fundamental do cálculo para integrais definidos.

Começaremos por definir o integral de uma função contínua $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ no caso de um rectângulo $R = [a, b] \times [c, d]$:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dA.$$

A seguir, veremos como o integral definido de uma função de duas variáveis (considerando uma delas constante):

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

nos permite calcular integrais iterados:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b F(x) dx.$$

Continuaremos com o cálculo de integrais em regiões mais gerais do que rectângulos, ou seja, regiões delimitadas por gráficos de funções contínuas e veremos uma aplicação ao cálculo da área de superfícies.

Finalmente, o conceito de jacobiano visto na primeira parte deste curso será aplicado ao problema da mudança de variáveis nos integrais duplos. Estudaremos o caso particular das coordenadas polares.

1.2 Integral duplo sobre domínios rectangulares

Começemos por definir o integral

$$\iint_R f(x, y) dx dy,$$

onde R é um rectângulo contido no domínio de f . Um rectângulo é o produto cartesiano de 2 intervalos de \mathbb{R} :

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$$

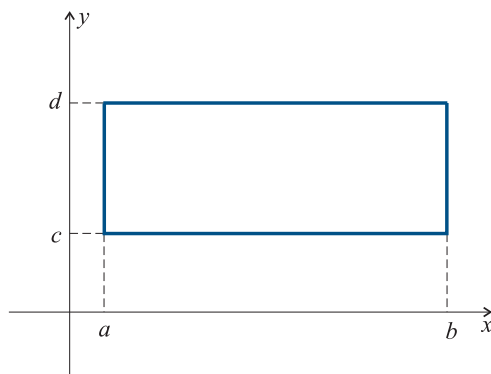


Figura 1.4 Um rectângulo.

Quando introduzimos o integral de Riemann para funções da recta real, começámos pela noção de subdivisão do intervalo de integração $[a, b]$. Aqui, vamos considerar subdivisões dos intervalos que definem o rectângulo e obter dessa forma uma partição de R :

Definição 1.2.4 Dados $n + 2$ pontos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_{n+1} = b$ e $m + 2$ pontos $c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_{m+1} = d$, ao conjunto dos subrectângulos da forma

$$R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

chama-se **partição** de R .

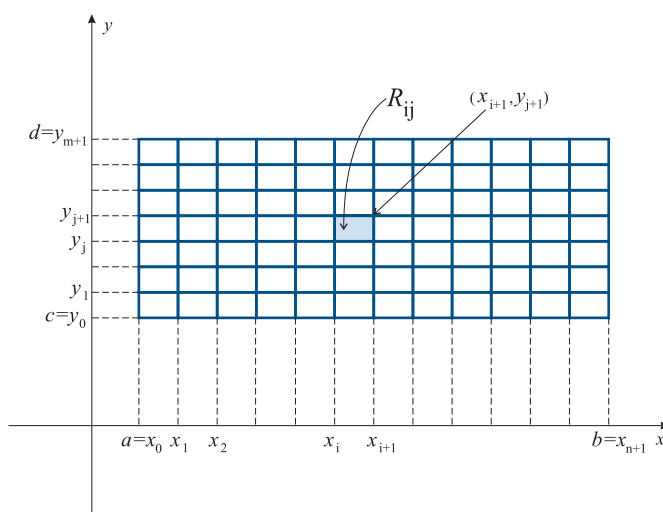


Figura 1.5 Uma partição do rectângulo R .

Note-se que acabámos de subdividir o rectângulo R em $(m + 1)(n + 1)$ rectângulos com a propriedade

$$R = \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} R_{ij}$$

e verificando para $(i, j) \neq (k, l)$, $\text{int}(R_{ij}) \cap \text{int}(R_{kl}) = \emptyset$.

Definição 1.2.5 Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, R um rectângulo contido em D e P uma partição de R . Chama-se **soma inferior de Darboux** de f , relativa à partição P a

$$s_P(f) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \Delta R_{ij} \inf_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y),$$

onde $\Delta R_{ij} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ é a área do rectângulo R_{ij} .

Da mesma forma, chama-se **soma superior de Darboux** de f , relativa à partição P a

$$S_P(f) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \Delta R_{ij} \sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y).$$

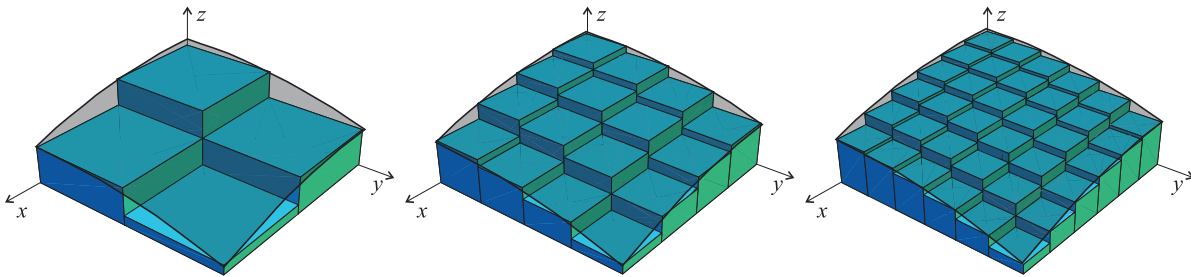


Figura 1.6 Somas inferiores de Darboux.

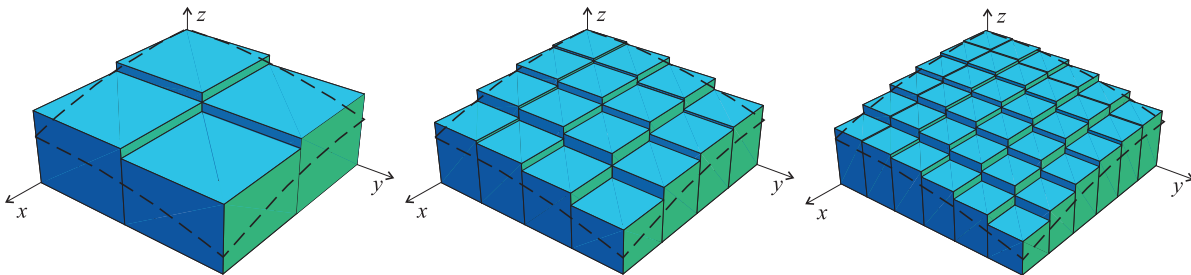


Figura 1.7 Somas superiores de Darboux.

Estamos agora em condições de dar a seguinte definição:

Definição 1.2.6 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e R um rectângulo contido em D . Diz-se que f é integrável em R se*

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} s_P(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}} S_P(f),$$

onde \mathcal{P} é o conjunto de todas as partições de R .

Define-se nesse caso o integral de f em R por:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \sup_{P \in \mathcal{P}} s_P(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}} S_P(f).$$

NOTA: Se f é contínua, não negativa e integrável em R , o integral de f é igual ao volume da figura limitada pelo gráfico de f e pelos planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ e $z = 0$ (plano xy) (ver Figura 1.8). Para nos convenceremos deste facto, basta ter em conta as figuras 1.6 e 1.7 e a definição. O integral é o ínfimo do conjunto das somas superiores, que são todas maiores ou iguais que aquele volume (ver Figura 1.7), portanto, o integral é maior ou igual ao volume da figura referida. Por outro lado, o integral também é o supremo do conjunto das somas inferiores, que são todas menores ou iguais àquele volume (ver Figura 1.6), portanto, o integral é menor ou igual ao volume da figura referida. Conclui-se assim que o integral é igual ao volume da figura.

No exemplo seguinte fazemos o cálculo, usando as somas de Darboux, de um integral duplo num caso simples. Em particular, provamos que o integral duplo

$$\iint_R 1 dA = \iint_R dA,$$

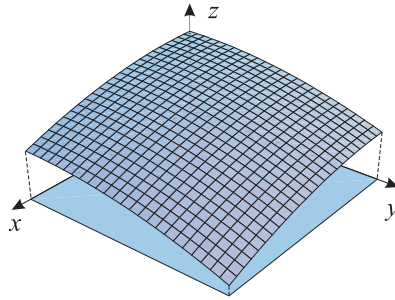


Figura 1.8 O integral é igual ao volume da figura indicada.

que dá o volume do sólido de altura 1 construído sobre o rectângulo R , tem o valor da área do rectângulo R . Designaremos essa área por $\mathcal{A}(R)$.

EXEMPLO 1: Consideremos a função $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 1$. Para toda a partição P do rectângulo $[a, b]$, com as notações anteriores, tem-se:

$$\begin{aligned} S_P(f) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \Delta R_{ij} \sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) = \\ &= \left(\sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \right) \left(\sum_{j=0}^m (y_{j+1} - y_j) \right) = (x_{n+1} - x_0)(y_{m+1} - y_0) = (b - a)(d - c). \end{aligned}$$

Da mesma forma, se obtém $s_P(f) = (b - a)(d - c)$.

Assim,

$$\iint_R dx dy = (b - a)(d - c) = \mathcal{A}(R).$$

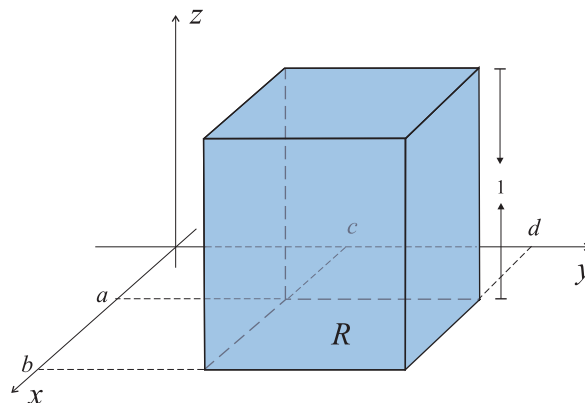


Figura 1.9 O integral é igual ao volume da figura indicada.

Admitiremos o resultado seguinte que nos dá uma condição suficiente para uma função ser integrável:

Teorema 1.2.1 *Sejam R um retângulo e $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua num conjunto aberto contendo R . Então f é integrável em R .*

Vimos, ao estudar o integral em \mathbb{R} , que uma função descontínua apenas num número finito de pontos de um intervalo I ainda era integrável. Também no caso de funções reais de duas variáveis reais há um teorema que garante a existência de integral de algumas funções descontínuas.

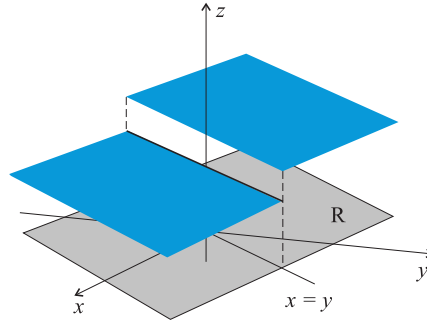


Figura 1.10 Uma função descontínua em R , mas integrável.

Teorema 1.2.2 *Seja $f : R \subset \mathbb{R}^2$ uma função limitada no retângulo R e suponhamos que o conjunto de pontos onde f é descontínua está contido na união de um número finito de gráficos de funções reais de variável real, contínuas. Então f é integrável em R .*

Vejamos, sem demonstrar, algumas propriedades dos integrais duplos:

Proposição 1 *Seja f uma função real de duas variáveis reais.*

1. *Sejam R_1 e R_2 dois retângulos tais que $\text{int}(R_1) \cap \text{int}(R_2) = \emptyset$. Se f é integrável em R_1 e em R_2 , e se $R = R_1 \cup R_2$ é um retângulo, então f é integrável em R e*

$$\iint_R f \, dA = \iint_{R_1} f \, dA + \iint_{R_2} f \, dA.$$

2. *Se f é integrável num retângulo R então $|f|$ é integrável em R e*

$$\left| \iint_R f \, dA \right| \leq \iint_R |f| \, dA.$$

3. *Seja $f \geq 0$ uma função integrável num retângulo R . Então*

$$\iint_R f \, dA \geq 0.$$

4. *Sejam f_1 e f_2 duas funções integráveis num retângulo R , e seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Então*

$$\iint_R (f_1 + cf_2) \, dA = \iint_R f_1 \, dA + c \iint_R f_2 \, dA.$$

1.3 Integrais iterados

Tal como acontece para a integração em \mathbb{R} , poucos integrais podem ser calculados directamente a partir das somas de Darboux. Neste capítulo vamos introduzir um método que permite calcular alguns integrais duplos a partir de integrais simples.

Consideremos uma função contínua $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Para todo o $x \in [a, b]$ podemos definir uma função $f_x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f_x(y) = f(x, y), \quad \forall y \in [c, d].$$

Qualquer que seja x , f_x é uma função contínua logo o integral usual:

$$\int_c^d f_x(y) dy = \int_c^d f(x, y) dy$$

está bem definido. A este processo chama-se **integração parcial em ordem a y** . De maneira equivalente podemos definir a **integração parcial em ordem a x** por:

$$\int_a^b f_y(x) dx = \int_a^b f(x, y) dx,$$

onde a função contínua f_y é definida para todo $y \in [c, d]$, por $f_y(x) = f(x, y)$, $\forall x \in [a, b]$.

EXEMPLO 1: Consideremos a função $f(x, y) = \frac{y}{x+2}$.

Vamos integrar parcialmente f em ordem a x e em ordem a y no rectângulo $[1, 2] \times [2, 3]$. Utilizando as regras de cálculo do integral definido temos:

$$\int_1^2 \frac{y}{x+2} dx = [y \log(x+2)]_1^2 = y \log\left(\frac{4}{3}\right).$$

Da mesma forma:

$$\int_2^3 \frac{y}{x+2} dy = \left[\frac{1}{x+2} \cdot \frac{y^2}{2} \right]_2^3 = \frac{5}{2(x+2)}.$$

EXEMPLO 2: Consideremos a função $f(x, y) = \frac{1+x^2}{1+y^2} + xy^2$. Vamos integrar parcialmente f em ordem a x e em ordem a y no rectângulo $[0, 1]^2$. Temos:

$$\int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1+y^2} + xy^2 \right) dx = \left[\frac{x + \frac{x^3}{3}}{1+y^2} + \frac{x^2}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{4}{3(1+y^2)} + \frac{y^2}{2}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1+y^2} + xy^2 \right) dy = \left[(1+x^2) \operatorname{arctg}(y) + x \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = (1+x^2) \frac{\pi}{4} + \frac{x}{3}.$$

Como vimos nestes exemplos, o integral parcial em ordem a x da função f é uma função de y . Da mesma forma, o integral parcial em ordem a y é uma função de x . Vamos admitir o resultado seguinte, cuja demonstração sai do âmbito deste curso:

Proposição 2 *Seja $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então as funções*

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad e \quad J(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

definidas, respectivamente, nos intervalos $[c, d]$ e $[a, b]$, são funções contínuas.

Sendo contínuas, estas funções podem ser integradas nos seus domínios respectivos:

Definição 1.3.7 *Os integrais*

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

e

$$\int_a^b J(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx,$$

*chamam-se **integrais iterados**.*

EXEMPLO 3: Calcular os integrais iterados de $f(x, y) = \frac{y}{x+2}$ no rectângulo $[1, 2] \times [2, 3]$.

Utilizando os cálculos anteriores temos:

$$\int_2^3 \int_1^2 \frac{y}{x+2} dx dy = \int_2^3 y \log \left(\frac{4}{3} \right) dy = \left[\frac{y^2}{2} \log \left(\frac{4}{3} \right) \right]_2^3 = \frac{5}{2} \log \left(\frac{4}{3} \right)$$

e,

$$\int_1^2 \int_2^3 \frac{y}{x+2} dy dx = \int_1^2 \frac{5}{2(x+2)} dx = \left[\frac{5}{2} \log(x+2) \right]_1^2 = \frac{5}{2} \log \left(\frac{4}{3} \right).$$

EXEMPLO 4: Calcular os integrais iterados de $f(x, y) = \frac{1+x^2}{1+y^2} + xy^2$ no rectângulo $[0, 1]^2$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1+y^2} + xy^2 \right) dx dy = \int_0^1 \left(\frac{4}{3(1+y^2)} + \frac{y^2}{2} \right) dy = \left[\frac{4}{3} \arctg(y) + \frac{y^3}{6} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1+y^2} + xy^2 \right) dy dx = \int_0^1 \left((1+x^2) \frac{\pi}{4} + \frac{x}{3} \right) dx = \left[\left(x + \frac{x^3}{3} \right) \frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{6} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{6}.$$

EXEMPLO 5: Cálculo do integral iterado de uma função do tipo $f(x, y) = g(x)h(y)$ com g e h duas funções contínuas em $[a, b]$ e em $[c, d]$, respectivamente. Temos:

$$\int_a^b \int_c^d g(x)h(y) dy dx = \int_a^b g(x) \left(\int_c^d h(y) dy \right) dx = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right).$$

De forma análoga tem-se que:

$$\int_c^d \int_a^b g(x)h(y) dx dy = \int_c^d h(y) \left(\int_a^b g(x) dx \right) dy = \left(\int_c^d h(y) dy \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right).$$

O facto dos integrais iterados dos últimos exemplos serem iguais não é acidental, como veremos de seguida.

1.4 Teorema de Fubini. Aplicação do integral iterado ao cálculo de volumes.

Historicamente, o cálculo de integrais iterados é baseado num método geométrico desenvolvido pelo matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) para calcular o volume de certos sólidos:

Proposição 3 (Método da secção) *Seja S um sólido de \mathbb{R}^3 e consideremos a família $\{P_x\}_{a \leq x \leq b}$ dos planos passando por $(x, 0, 0)$ e paralelos ao plano yz tal que:*

1. S está contido entre P_a e P_b ,
2. A área da intersecção $P_x \cap S$ é dada por $A(x)$.

Se a função $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for integrável então o volume V de S é dado por:

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

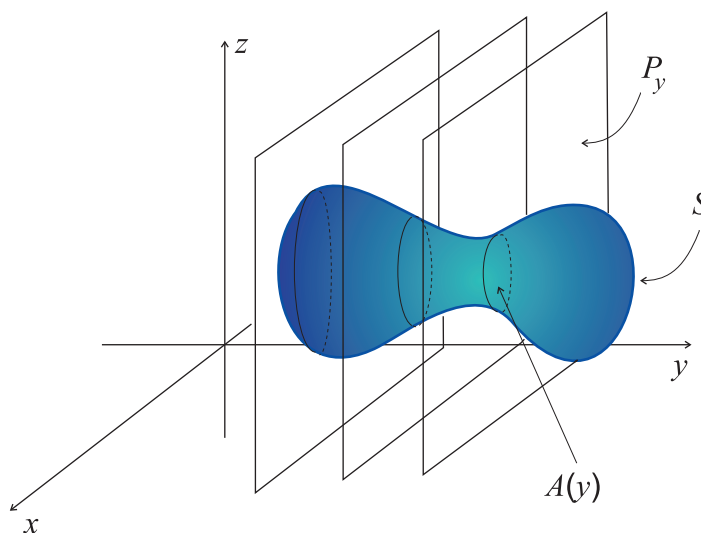


Figura 1.11 O Método da Secção.

NOTAS:

1. Vamos dar uma interpretação geométrica deste resultado. Chama-se S_x a intersecção entre P_x e S , o cilindro de base S_x e altura o "infinitésimo dx " tem por volume $A(x)dx$. O volume de S é dado pela soma desses volumes infinitesimais. Note-se que se trata aqui de uma interpretação intuitiva: não existem "alturas infinitesimais"!
2. A proposição é obviamente válida se substituirmos P_x por uma família $\{P_y\}_{c \leq y \leq d}$ de planos paralelos ao plano xz desde que S esteja contido entre P_c e P_d . O mesmo acontece com planos paralelos a xy .

EXEMPLO 1: Cálculo do volume do sólido S delimitado pelo plano $z = 1 - x$ e o rectângulo $R = [0, 1]^2$:

Para $x \in [0, 1]$, a intersecção do plano P_x , passando por $(x, 0, 0)$ e paralelo ao plano yz , com o sólido S é um rectângulo de comprimento 1 e de largura $1 - x$; a sua área é dada por $A(x) = 1 - x$. O Método da Secção permite-nos concluir que o volume de S é:

$$V = \int_0^1 (1 - x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

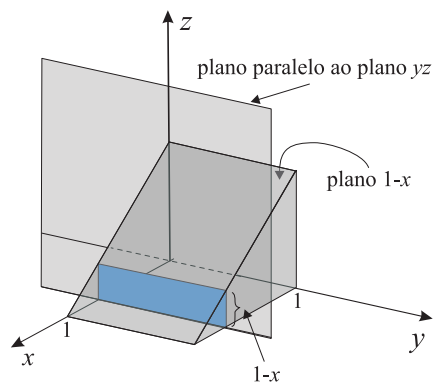


Figura 1.12 O sólido do Exemplo 1.

EXEMPLO 2: Volume de um sólido de revolução

Seja f uma função contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$. Consideremos a região R do plano limitada pelo eixo dos xx , as rectas de equação $x = a$, $x = b$ e o gráfico de f ,

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x) \wedge x \in [a, b]\}.$$

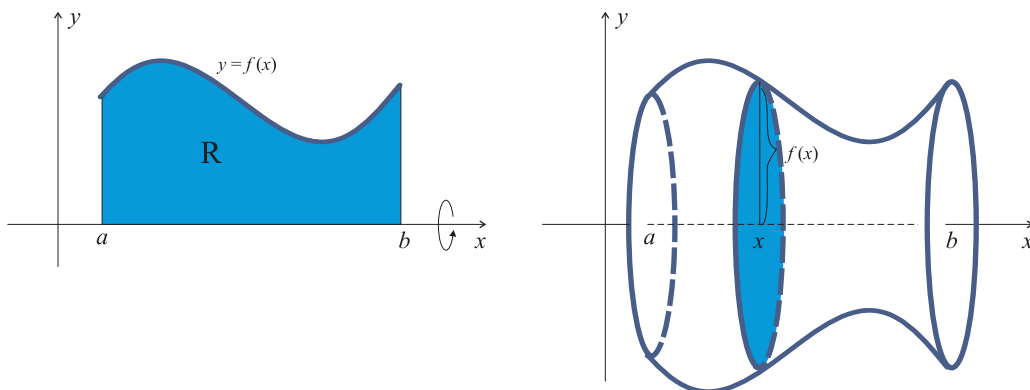


Figura 1.13 Um sólido de revolução.

A rotação de R em torno do eixo dos xx permite-nos definir um sólido de revolução S . Seja P_x , para cada $x \in [a, b]$, o plano passando por $(x, 0, 0)$ e paralelo ao plano yz . A secção

$S_x = P_x \cap S$ é um disco de centro $(x, 0, 0)$ e raio $f(x)$. A área de S_x é dada por :

$$A(x) = \pi [f(x)]^2.$$

Logo pelo Método da Secção, o volume de S é:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

O resultado seguinte permite-nos afirmar que nos integrais duplos sobre rectângulos a ordem de integração é irrelevante, e faz a ligação entre o integral duplo construído com as somas de Darboux e os integrais iterados:

Teorema 1.4.3 (Teorema de Fubini) *Seja $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Demonstração: A demonstração rigorosa deste teorema está fora do âmbito deste curso. Vamos dar apenas uma ideia geométrica no caso em que a função f é não negativa.

Quando construímos o integral duplo como limite de somas de Darboux, vimos que o volume V do sólido S limitado superiormente pela superfície de equação $z = f(x, y)$ e inferiormente pela região R é dado por:

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$

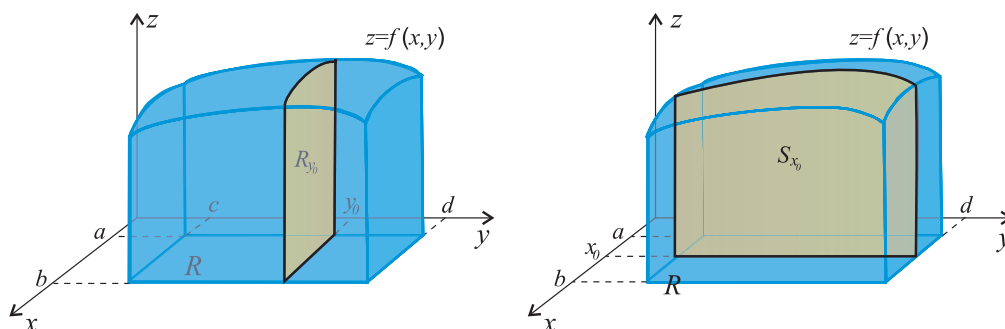


Figura 1.14 Os cortes na superfície S .

Graças ao Método da Secção temos uma outra maneira de calcular esse volume. Consideremos para $x \in [a, b]$ o plano P_x passando por $(x, 0, 0)$ e paralelo ao plano yz . Fixando $x = x_0$ no intervalo $[a, b]$, a intersecção $S_{x_0} = P_{x_0} \cap S$ é uma região plana limitada pelos planos xy , $y = c$, $y = d$ e a curva de equação $z = f(x_0, y)$. Recorrendo à teoria de integração de funções reais, a área de S_{x_0} é dada por:

$$A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy.$$

O Método da Secção permite-nos concluir que o volume de S é:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Vamos agora aplicar o método da secção à família de planos Q_y passando por $(0, y, 0)$ e paralelos a xz . Fixando $y = y_0$ no intervalo $[c, d]$, a intersecção $R_{y_0} = Q_{y_0} \cap S$ é uma região plana limitada pelos planos xy , $x = a$, $x = b$ e pela curva de equação $z = f(x, y_0)$. Como anteriormente, a área de R_{y_0} é dada por:

$$B(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx.$$

Aplicando o Método da Secção, temos que:

$$V = \int_c^d B(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Podemos então concluir que

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \blacksquare$$

EXEMPLO 3: Cálculo do volume do sólido limitado superiormente pela superfície de equação $z = y^2 - x^2$ e inferiormente pela região rectangular $R = [-1, 1] \times [1, 3]$.

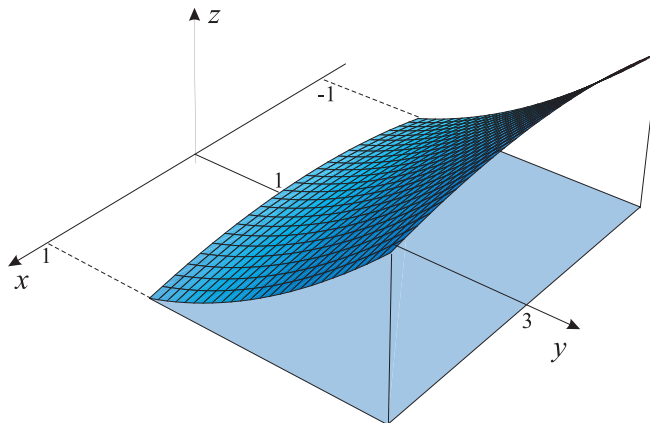


Figura 1.15 O sólido do Exemplo 3.

$$V = \int_{-1}^1 \int_1^3 (y^2 - x^2) dy dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{y^3}{3} - x^2 y \right]_1^3 dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{26}{3} - 2x^2 \right) dx = 16.$$

EXEMPLO 4: Cálculo do volume do sólido limitado superiormente pelo parabolóide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$, os planos $x = 2$, $y = 2$ e os três planos coordenados (ver Figura 1.16).

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dx dy = \int_0^2 \left[16x - \frac{x^3}{3} - 2xy^2 \right]_0^2 dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2 \right) dy = \frac{4}{3} [22y - y^3]_0^2 = 48. \end{aligned}$$

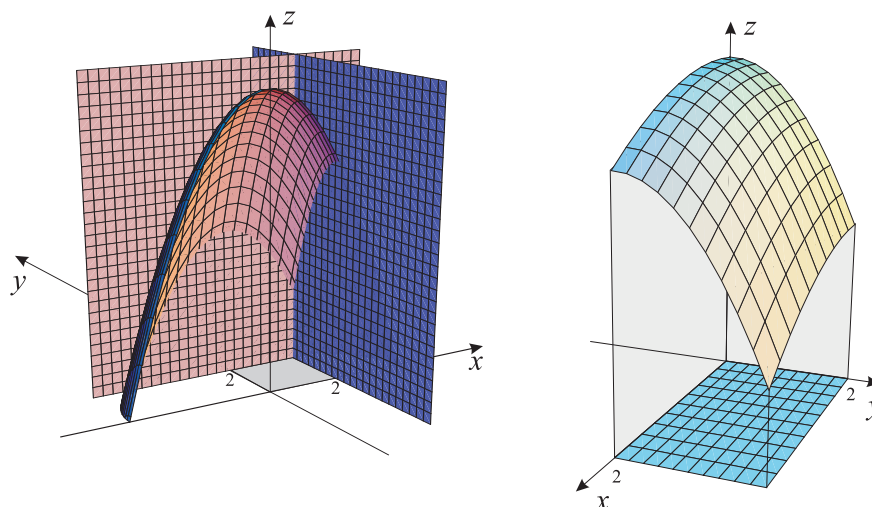


Figura 1.16 Duas perspectivas do parabolóide elíptico do Exemplo 4.

1.5 Integrais duplos sobre domínios gerais

Definimos anteriormente integral duplo sobre um conjunto rectangular. Pretendemos generalizar essa definição a outras regiões limitadas do plano. Dado que regiões no plano podem ser muito complexas, vamos restringir-nos a três tipos de conjuntos. No que se segue usaremos a expressão "fronteira suficientemente regular" com o seguinte sentido: a fronteira do domínio é constituída por curvas que representam os gráficos de funções reais de variável real, contínuas num intervalo. Adiante veremos com mais profundidade o significado desta expressão.

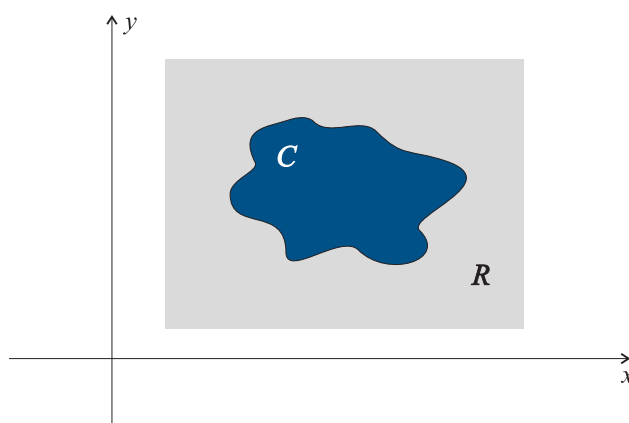


Figura 1.17 Um conjunto limitado.

Seja \mathcal{C} um conjunto limitado do plano, com fronteira suficientemente regular. Consideremos $f : \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em \mathcal{C} . Sendo \mathcal{C} limitado, existe um rectângulo R que contém \mathcal{C} . Para definir o integral duplo de f sobre a região \mathcal{C} , começamos por prolongar f ao

rectângulo R . Seja \bar{f} o prolongamento de f definido do seguinte modo:

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } (x, y) \in \mathcal{C}, \\ 0, & \text{se } (x, y) \in R \setminus \mathcal{C}. \end{cases}$$

Definição 1.5.8 Se \bar{f} é integrável no rectângulo R então f é **integrável** em \mathcal{C} . Podemos definir

$$\iint_{\mathcal{C}} f \, dA = \iint_R \bar{f} \, dA.$$

NOTAS:

1. Na realidade, é sempre o caso se f for contínua no conjunto \mathcal{C} e se a fronteira de \mathcal{C} for *regular*. Veremos na secção seguinte exemplos de tais conjuntos.
2. É importante notar que a definição do integral duplo de f sobre \mathcal{C} não depende da escolha do rectângulo R . Seja R' um rectângulo tal que $\mathcal{C} \subset R'$, temos:

$$\iint_{R'} \bar{f} \, dA = \iint_R \bar{f} \, dA + \iint_{R' \setminus R} \bar{f} \, dA.$$

Verifica-se que para todo $(x, y) \in R' \setminus R$, temos $\bar{f}(x, y) = 0$, logo :

$$\iint_{R' \setminus R} \bar{f} \, dA = 0.$$

3. Se $f(x, y) \geq 0$ em \mathcal{C} temos $\bar{f}(x, y) \geq 0$ em R . Consideremos o sólido S limitado superiormente pela superfície de equação $z = f(x, y)$ e inferiormente pelo conjunto \mathcal{C} . Seja \bar{S} o sólido limitado superiormente pela superfície de equação $z = \bar{f}(x, y)$ e inferiormente pelo rectângulo R . A diferença entre os dois sólidos é constituída pelos pontos de R que não pertencem a \mathcal{C} e tem uma contribuição nula para o volume de \bar{S} , logo S e \bar{S} têm o mesmo volume:

$$\text{Volume}(S) = \text{Volume}(\bar{S}) = \iint_{\mathcal{C}} f \, dA.$$

De modo geral, sejam f_1 e f_2 duas funções integráveis num conjunto \mathcal{C} e tais que: $f_1 \geq f_2$. O volume do sólido S limitado superiormente pelo gráfico de f_1 e inferiormente pelo gráfico de f_2 é:

$$\text{Volume}(S) = \iint_{\mathcal{C}} (f_1 - f_2) \, dA.$$

Esta definição não é útil para calcular directamente integrais duplos sobre regiões gerais, no entanto, sabendo que esses integrais podem ser interpretados como volumes podemos calcular certos casos simples.

EXEMPLO: Sendo $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e f a função constante de valor 3, calcular:

$$\iint_{\mathcal{C}} f \, dA.$$

O sólido limitado superiormente pelo gráfico de f e inferiormente por \mathcal{C} é um cilindro de altura 3 e área da base π . Logo o seu volume é 3π :

$$\iint_{\mathcal{C}} f \, dA = 3\pi.$$

1.6 Conjuntos básicos

Na secção anterior, ao definir integral duplo em regiões não rectangulares, fizemos referência a três tipos de conjuntos. Nesta secção vamos definir esses conjuntos e deduzir um método relativamente geral para calcular integrais duplos sobre esses conjuntos.

Definição 1.6.9 *Uma região \mathcal{V} do plano diz-se **verticalmente simples** se existirem $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, g_1 e g_2 duas funções contínuas em $[a, b]$ tais que:*

$$\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

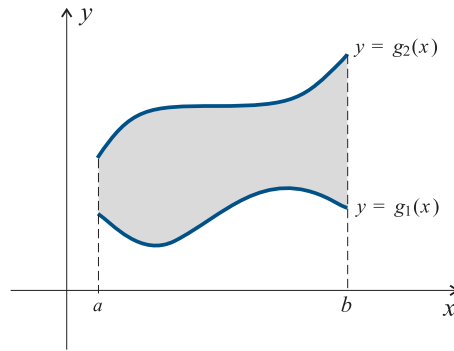


Figura 1.18 Um conjunto verticalmente simples.

Proposição 4 *Seja f contínua numa região, \mathcal{V} , verticalmente simples. Então*

$$\iint_{\mathcal{V}} f \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Demonstração: Seja $R = [a, b] \times [c, d]$ um rectângulo que contém \mathcal{V} . Definimos como na secção anterior uma função \bar{f} :

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } (x, y) \in \mathcal{V}, \\ 0, & \text{se } (x, y) \in R \setminus \mathcal{V}. \end{cases}$$

Por definição e aplicando o Teorema de Fubini, temos:

$$\iint_{\mathcal{V}} f \, dA = \iint_R \bar{f} \, dA = \int_a^b \int_c^d \bar{f}(x, y) \, dy \, dx.$$

Sendo \bar{f} nula no complementar de \mathcal{V} e igual a f em \mathcal{V} temos para $a \leq x \leq b$:

$$\int_c^d \bar{f}(x, y) \, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \bar{f}(x, y) \, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

Logo podemos concluir que:

$$\iint_{\mathcal{V}} f \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx. \blacksquare$$

EXEMPLO 1: Calculemos o integral $\iint_{\mathcal{D}} (x + 2y) \, dA$, onde \mathcal{D} é o conjunto representado na

Figura 1.19. O conjunto \mathcal{D} é um conjunto verticalmente simples:

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}.$$

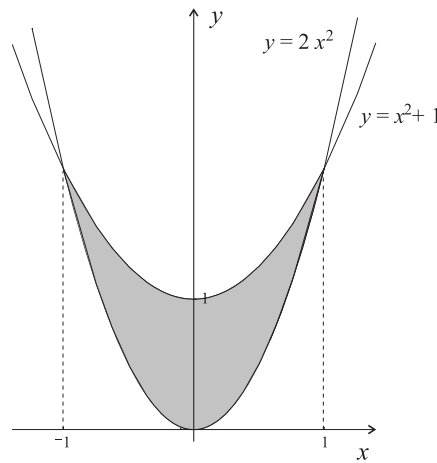


Figura 1.19 Um conjunto verticalmente simples.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} (x + 2y) \, dA &= \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y) \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{2x^2}^{1+x^2} \, dx \\ &= \int_{-1}^1 (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) \, dx = \int_{-1}^1 \left[-\frac{3x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 \, dx = \frac{32}{5}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2: Cálculo do volume do sólido limitado superiormente pelo plano $z = 1 - x$ e inferiormente pela região:

$$\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x \leq y \leq 1 + x^2\}.$$

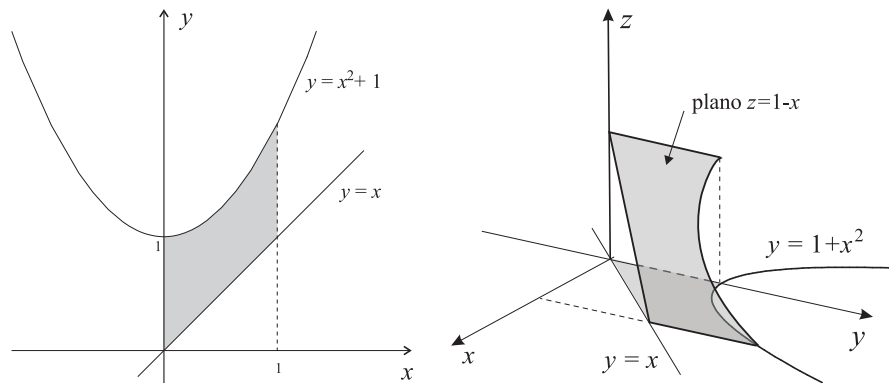


Figura 1.20 Volume sobre um conjunto verticalmente simples.

Se \mathcal{V} verticalmente simples, pela proposição anterior temos que o volume do sólido é dado por:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{V}} (1-x) dA &= \int_0^1 \int_x^{1+x^2} (1-x) dy dx = \int_0^1 [y - xy]_x^{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 (1 - 2x + 2x^2 - x^3) dx = \left[x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

De maneira análoga podemos definir:

Definição 1.6.10 Uma região \mathcal{H} do plano diz-se **horizontalmente simples** se existirem $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, h_1 e h_2 duas funções contínuas em $[c, d]$ tais que:

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

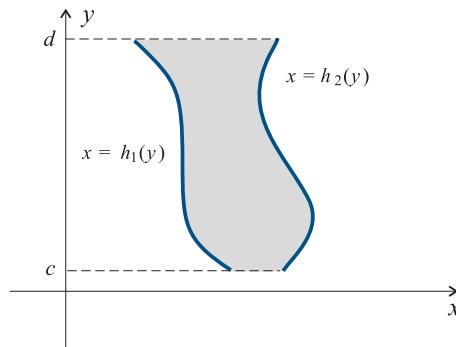


Figura 1.21 Um conjunto horizontalmente simples.

Tal como no caso das regiões verticalmente simples, temos para as regiões horizontalmente simples o resultado seguinte:

Proposição 5 Seja f contínua numa região, \mathcal{H} , horizontalmente simples. Então

$$\iint_{\mathcal{H}} f dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

EXEMPLO 3: Cálculo do volume do sólido limitado superiormente pelo gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{x}$ e limitado inferiormente pela região:

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge y \leq x \leq e^y\}.$$

Sendo \mathcal{H} horizontalmente simples o volume do sólido é dado por:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{H}} \sqrt{x} \, dA &= \int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_y^{e^y} dy = \frac{2}{3} \int_0^1 (e^{\frac{3}{2}y} - y^{\frac{3}{2}}) dy \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}y} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{15} \right). \end{aligned}$$

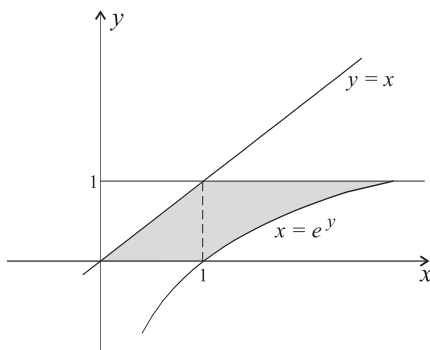


Figura 1.22 O domínio de integração do Exemplo 3.

Note-se que há regiões do plano que são simultaneamente horizontal e verticalmente simples. Chamaremos **regiões mistas** a esse tipo de conjuntos.

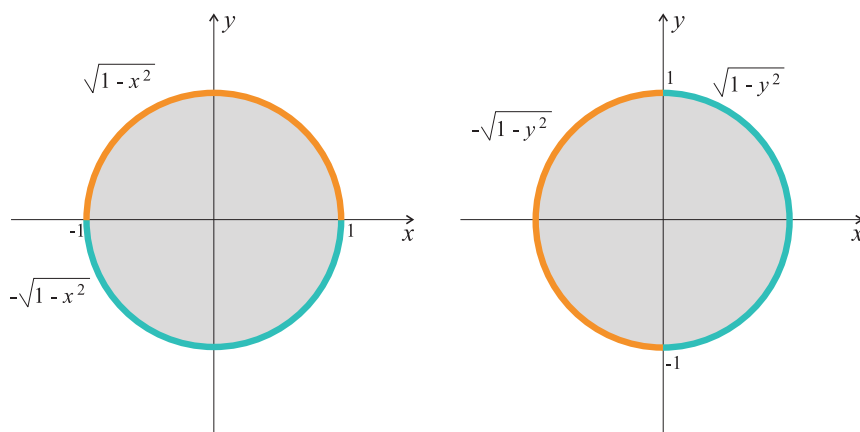


Figura 1.23 Uma região mista.

EXEMPLO 4: O círculo $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$ é uma região mista (ver Figura 1.23). De facto \mathcal{C} é horizontalmente simples:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\},$$

e verticalmente simples:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1 \wedge -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

EXEMPLO 5: O conjunto $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ é verticalmente simples. Verifica-se que:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\},$$

logo \mathcal{C} é um conjunto misto.

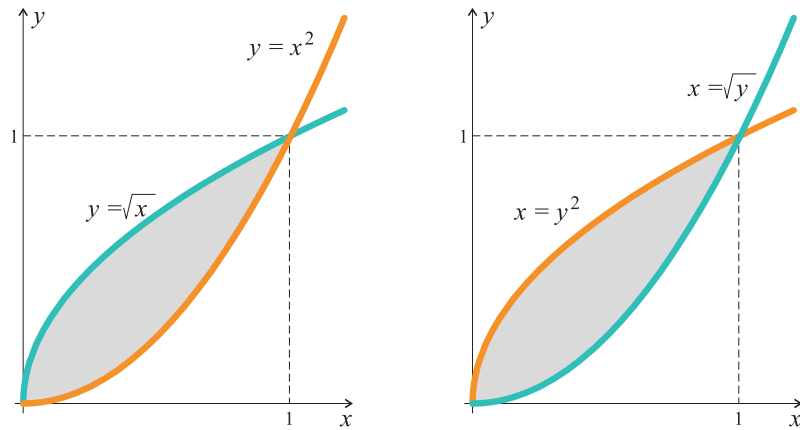


Figura 1.24 Uma região mista.

De modo geral, se f é uma função contínua numa região mista \mathcal{C} , tem-se:

$$\iint_{\mathcal{C}} f \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

EXEMPLO 6: Calculemos o integral $\iint_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) \, dA$ onde \mathcal{C} é o conjunto representado na

Figura 1.25. A região de integração é uma região mista. Considerando esta região como verticalmente simples temos:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) \, dA &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) \, dy \, dx = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{2x} dx \\ &= \int_0^2 \left(2x^3 + \frac{8x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \left[\frac{14}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right]_0^2 = \frac{216}{35}. \end{aligned}$$

Considerando a região como horizontalmente simples temos:

$$\iint_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) \, dA = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dy$$

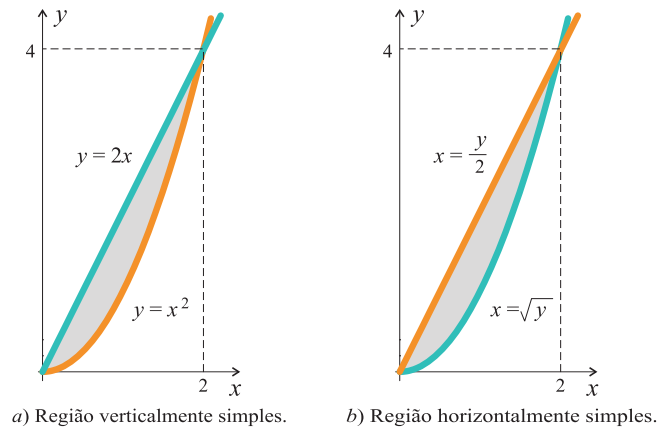


Figura 1.25 A região de integração do Exemplo 6.

$$= \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{y^3}}{3} + \sqrt{y^5} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy = \left[\frac{2\sqrt{y^5}}{15} + \frac{2\sqrt{y^7}}{7} - \frac{13}{24} \cdot \frac{y^4}{4} \right]_0^4 = \frac{216}{35}.$$

Em certos casos algum dos integrais iterados precedentes pode não ser fácil de calcular, utilizando-se então uma técnica denominada **mudança da ordem de integração** ou **inversão da ordem de integração**. Vejamos alguns exemplos.

EXEMPLO 7: Cálculo de $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy$ invertendo a ordem de integração.

Calcular directamente este integral iterado torna-se impossível porque a função $f(x) = e^{x^4}$ não admite uma primitiva que se escreva de forma elementar.

O primeiro passo é interpretar este integral iterado como um integral duplo num conjunto horizontalmente simples:

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy = \iint_{\mathcal{C}} e^{x^4} dA,$$

com $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 8 \wedge \sqrt[3]{y} \leq x \leq 2\}$.

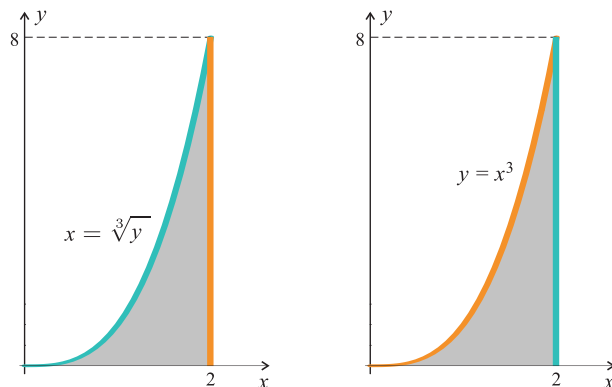


Figura 1.26 O conjunto \mathcal{C} do Exemplo 7.

Com a ajuda da representação gráfica de \mathcal{C} (ver Figura 1.26), o segundo passo é notar que \mathcal{C} é uma região mista:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq x^3\}$$

é verticalmente simples, logo:

$$\begin{aligned} \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy &= \iint_{\mathcal{C}} e^{x^4} dA = \int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx \\ &= \int_0^2 [ye^{x^4}]_0^{x^3} dx = \int_0^2 x^3 e^{x^4} dx = \left[\frac{e^{x^4}}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{4}(e^{16} - 1). \end{aligned}$$

EXEMPLO 8: Cálculo de $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \operatorname{sen}(y^3) dy dx$ invertendo a ordem de integração.

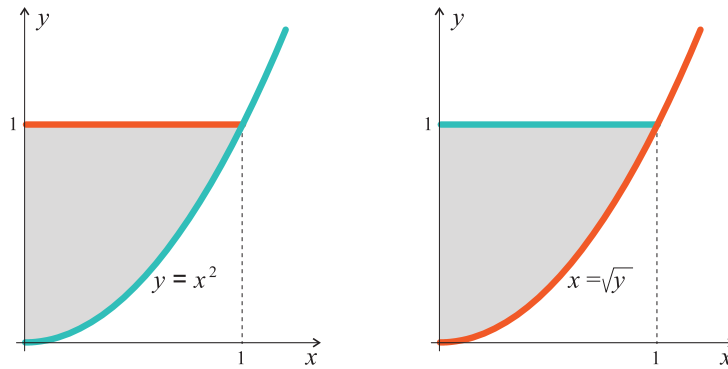


Figura 1.27 O conjunto \mathcal{C} do Exemplo 8.

Notar que este integral iterado é um integral duplo sobre uma região \mathcal{C} verticalmente simples:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq 1\}.$$

Com a ajuda de uma representação gráfica verifica-se que \mathcal{C} é um conjunto misto:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq \sqrt{y}\},$$

logo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \operatorname{sen}(y^3) dy dx &= \iint_{\mathcal{C}} x^3 \operatorname{sen}(y^3) dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 \operatorname{sen}(y^3) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4} \operatorname{sen}(y^3) \right]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{y^2}{4} \operatorname{sen}(y^3) dy = \left[-\frac{1}{12} \cos(y^3) \right]_0^1 = \frac{1 - \cos(1)}{12}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 9: Calculemos o volume do sólido limitado superiormente pela superfície de equação $z = \sqrt{x^3 + 1}$ e inferiormente pela região:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge \sqrt{y} \leq x \leq 1\}.$$

Seendo \mathcal{C} horizontalmente simples, o volume procurado tem por expressão:

$$V = \iint_{\mathcal{C}} \sqrt{x^3 + 1} \, dA = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} \, dx \, dy.$$

Não sabemos calcular uma primitiva da função $\sqrt{x^3 + 1}$. Temos que mudar a ordem de integração. Seendo \mathcal{C} um conjunto misto:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$$

temos:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3 + 1} \, dy \, dx = \int_0^1 \left[y \sqrt{x^3 + 1} \right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx \\ &= \left[\frac{2}{9} (x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{9} (2^{\frac{3}{2}} - 1). \end{aligned}$$

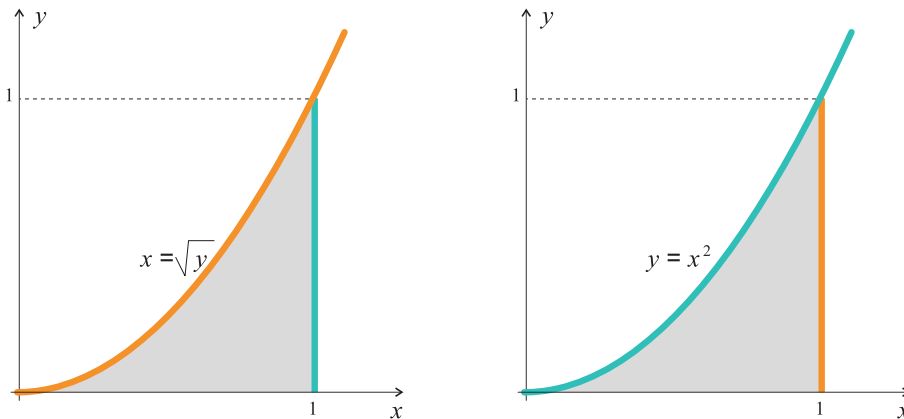


Figura 1.28 O conjunto \mathcal{C} do Exemplo 9.

EXEMPLO 10: Calculemos o integral $\int_0^1 \int_x^1 \text{sen}(y^2) \, dy \, dx$. A função $\text{sen}(y^2)$ não é elementarmente primitivável em ordem a y , portanto, vamos inverter a ordem de integração.

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x \leq y \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq y\}.$$

Podemos escrever a igualdade

$$\int_0^1 \int_x^1 \text{sen}(y^2) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^y \text{sen}(y^2) \, dx \, dy,$$

sendo o integral facilmente calculado:

$$\int_0^1 \int_0^y \text{sen}(y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 \text{sen}(y^2) [x]_0^y \, dy = \int_0^1 y \text{sen}(y^2) \, dy = \left[-\frac{\cos(y^2)}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\cos(1)}{2}.$$

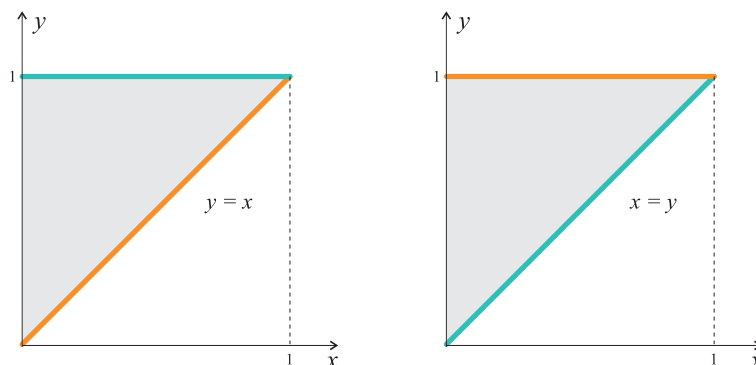


Figura 1.29 O conjunto C do Exemplo 10.

Teorema 1.6.4 (Teorema da Média) *Sejam D um conjunto básico e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe $(a, b) \in D$ tal que*

$$\iint_D f(x, y) dA = f(a, b) A(D),$$

onde $A(D)$ é a área de D .

1.7 Mudança de variáveis

Quando estudámos o integral definido, vimos que alguns integrais são mais fáceis de calcular utilizando uma **integração por substituição**:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt,$$

onde f é uma função contínua e ϕ é uma função bijectiva de classe C^1 tal que $\phi(\alpha) = a$ e $\phi(\beta) = b$.

Vamos agora ver uma fórmula análoga no caso dos integrais duplos. Suponhamos que uma

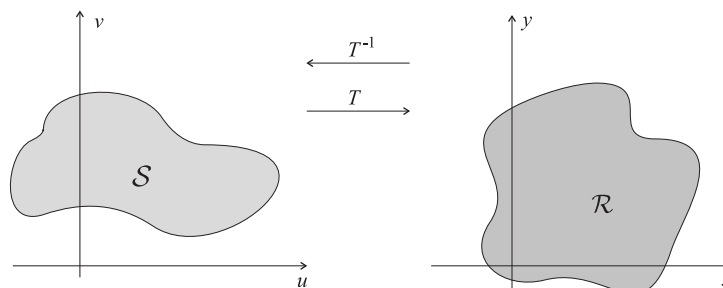


Figura 1.30 O conjunto \mathcal{S} é transformado no conjunto \mathcal{R} .

região \mathcal{S} no plano uv é transformada, de forma injectiva, numa região \mathcal{R} no plano xy pelas equações $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ (ver Figura 1.30). \mathcal{R} é a imagem de \mathcal{S} por esta transformação e \mathcal{S} é a imagem inversa de \mathcal{R} . De facto, qualquer função $f(x, y)$ definida em \mathcal{R} pode ser encarada

como uma função $f(x(u, v), y(u, v))$ definida em \mathcal{S} . A questão é saber como se relaciona o integral de $f(x, y)$ sobre \mathcal{R} com o integral de $f(x(u, v), y(u, v))$ sobre \mathcal{S} .

Sejam \mathcal{R} e \mathcal{S} dois conjuntos básicos de \mathbb{R}^2 : por exemplo conjuntos que sejam horizontal ou verticalmente simples. Seja $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ uma função vectorial definida por:

$$\forall (u, v) \in \mathcal{S}, \quad T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

Sabemos que se T for diferenciável em (u_0, v_0) podemos definir o seu jacobiano nesse ponto:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix}$$

Teorema 1.7.5 *Sejam $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ uma função vectorial tal que $T(\mathcal{S}) = \mathcal{R}$ e*

- (i) T é de classe C^1 ,
- (ii) T é injectiva no interior de \mathcal{S} ,
- (iii) o jacobiano de T não se anula em $\text{int}(\mathcal{S})$:

$$\forall (u_0, v_0) \in \text{int}(\mathcal{S}), \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0.$$

Então

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA = \iint_{\mathcal{S}} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

EXEMPLO: Calculemos o integral $\iint_{\mathcal{R}} (2x^2 - xy - y^2) dx dy$ usando a mudança de variável

definida por $T(u, v) = \left(\frac{u+v}{3}, \frac{v-2u}{3} \right)$, e onde \mathcal{R} é a região do primeiro quadrante limitada pelas curvas $y = -2x + 4$, $y = -2x + 7$, $y = x - 2$ e $y = x + 1$ (ver Figura 1.31).

A função T transforma as rectas que definem o conjunto \mathcal{R} nas rectas $v = 4$, $v = 7$, $u = 2$ e $u = -1$. Além disso, o jacobiano de T é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} (2x^2 - xy - y^2) dx dy &= \iint_{\mathcal{R}} (2x + y)(x - y) dx dy = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{3} uv du dv \\ &= \int_4^7 \int_{-1}^2 \frac{1}{3} uv du dv = \int_4^7 \frac{1}{3} v \left[\frac{u^2}{2} \right]_{-1}^2 dv = \int_4^7 \frac{1}{2} v dv = \left[\frac{v^2}{4} \right]_4^7 = \frac{33}{4}. \end{aligned}$$

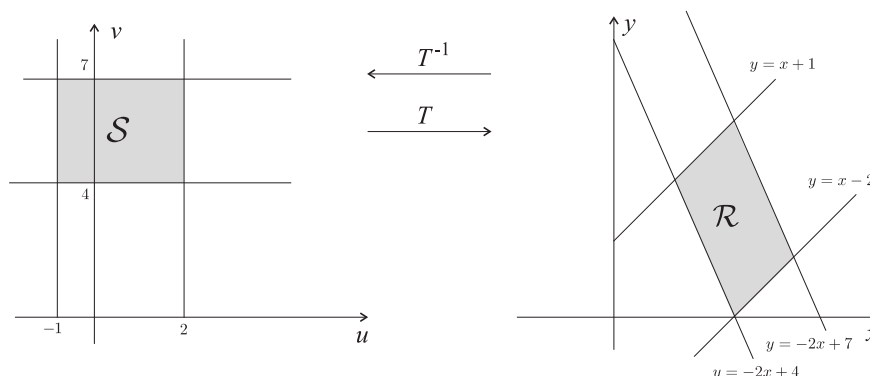


Figura 1.31 O conjunto \mathcal{S} é transformado no conjunto \mathcal{R} .

1.7.1 Mudança de variáveis em coordenadas polares

No caso das coordenadas polares, a função de substituição tem a seguinte expressão:

$$T : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

T é sobrejectiva, é injectiva em $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ e o jacobiano é diferente de zero nesse conjunto:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r.$$

Logo, no caso das coordenadas polares, a fórmula de mudança de variável nos integrais duplos é:

$$\iint_{\mathcal{R}} f \, dA = \iint_{\mathcal{R}^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta,$$

onde o conjunto \mathcal{R}^* é o conjunto \mathcal{R} visto no plano das coordenadas polares.

Esta função é particularmente útil porque transforma regiões rectangulares no plano $r\theta$ em regiões circulares no plano xy . Por exemplo, se $a > 0$, T aplica a região

$$\mathcal{R}^* = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a \wedge 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

do plano $r\theta$ na região

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a\}$$

do plano xy , como se pode ver no Exemplo 2. Mais geralmente, quaisquer que sejam α e β , $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$, T transforma a região

$$\mathcal{R}^* = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a \wedge \alpha \leq \theta < \beta\}$$

do plano $r\theta$ na região \mathcal{R} do plano xy que é o sector circular da bola fechada de centro em $(0, 0)$ e raio \sqrt{a} compreendido entre os ângulos α e β . Como se pode ver no Exemplo 1, T transforma regiões rectangulares do plano $r\theta$ em coroas circulares no plano xy .

EXEMPLO 1: Cálculo de $\iint_{\mathcal{R}} e^{x^2+y^2} dA$ onde \mathcal{R} está definido por (ver Figura 1.32):

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

O primeiro passo para calcular este integral é encontrar o conjunto \mathcal{R}^* que é a representação de \mathcal{R} no plano das coordenadas polares.

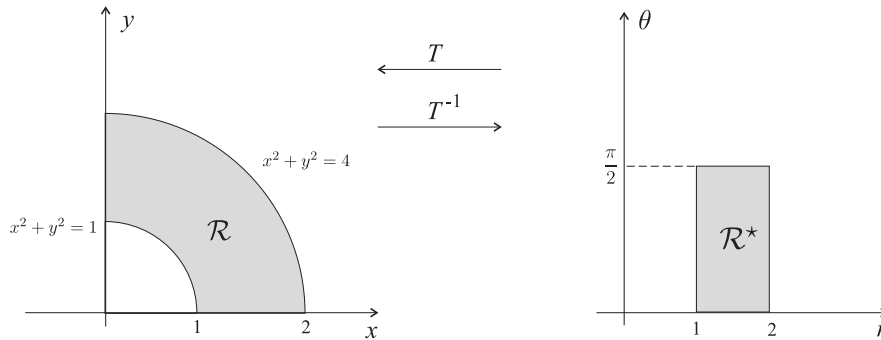


Figura 1.32 O conjunto \mathcal{R} do Exemplo 1.

Utilizando uma representação geométrica de \mathcal{R} tem-se que as condições $x \geq 0 \wedge y \geq 0$ correspondem no plano das coordenadas polares a:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Notando que:

$$x^2 + y^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2,$$

tem-se que a condição $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ corresponde no plano das coordenadas polares a:

$$1 \leq r^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq r \leq 2.$$

Podemos concluir que \mathcal{R} se representa no plano das coordenadas polares por:

$$\mathcal{R}^* = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Finalmente, pelo teorema da mudança de variável aplicado às coordenadas polares tem-se:

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{x^2+y^2} dA = \iint_{\mathcal{R}^*} e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r e^{r^2} dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_1^2 d\theta = \frac{\pi}{4} (e^4 - e).$$

EXEMPLO 2: Calculemos o volume do sólido S limitado pelo plano $z = 0$, o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e o parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$.

A intersecção do cilindro com o plano $z = 0$ é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$. O sólido estudado é assim limitado superiormente pelo parabolóide e inferiormente pelo disco $x^2 + y^2 \leq 1$ do plano xy . O volume de S é dado pelo integral duplo:

$$V = \iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2) dA,$$

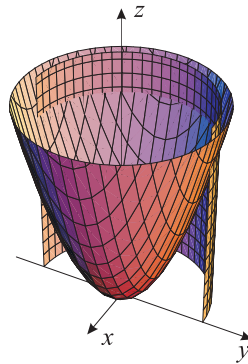


Figura 1.33 O sólido do Exemplo 2.

onde $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. No plano das coordenadas polares, \mathcal{R} representa-se como o conjunto:

$$\mathcal{R}^* = \{(r, \theta) : r \leq 1 \wedge 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

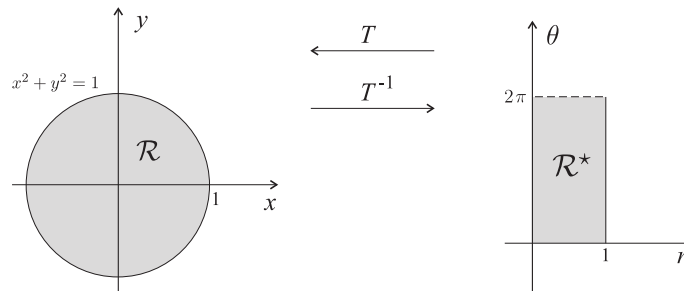


Figura 1.34 Os conjuntos \mathcal{R} e \mathcal{R}^* do Exemplo 2.

Utilizando a mudança de variáveis em coordenadas polares temos:

$$V = \iint_{\mathcal{R}^*} r^3 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

EXEMPLO 3: Cálculo de $\iint_{\mathcal{R}} (x + y) dA$ onde \mathcal{R} é a região

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4 \wedge (x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}.$$

Notando que:

$$x^2 + y^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2,$$

verificamos que a condição $x^2 + y^2 \geq 4$ corresponde no plano das coordenadas polares a:

$$r^2 \geq 4 \Leftrightarrow r \geq 2,$$

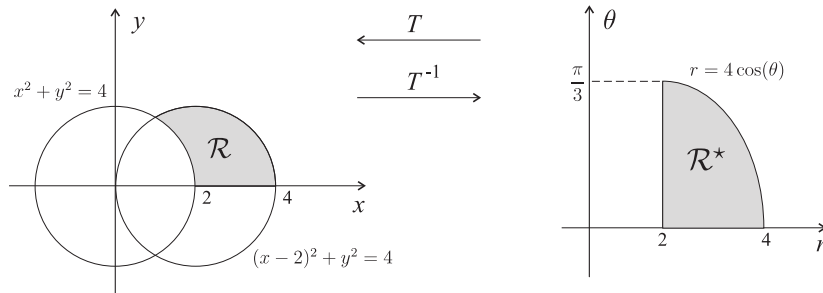


Figura 1.35 Os conjuntos \mathcal{R} e \mathcal{R}^* do Exemplo 3.

e a condição $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$ corresponde a:

$$(r \cos(\theta) - 2)^2 + r^2 \sin^2(\theta) \leq 4 \Leftrightarrow r \leq 4 \cos(\theta).$$

Podemos concluir que \mathcal{R} se representa no plano das coordenadas polares por:

$$\mathcal{R}^* = \{(r, \theta) : 2 \leq r \leq 4 \cos(\theta) \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}.$$

Então

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} (x+y) dA &= \iint_{\mathcal{R}^*} (r \cos(\theta) + r \sin(\theta)) r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_2^{4 \cos(\theta)} r^2 (\cos(\theta) + \sin(\theta)) dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \left[\frac{r^3}{3} \right]_2^{4 \cos(\theta)} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \left(\frac{64}{3} \cos^3(\theta) - \frac{8}{3} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{64}{3} \cdot \cos^4(\theta) - \frac{8}{3} \cdot \cos(\theta) + \frac{64}{3} \cdot \sin(\theta) \cos^3(\theta) - \frac{8}{3} \cdot \sin(\theta) \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{16}{3} (1 + \cos(2\theta))^2 d\theta + \left[-\frac{8}{3} \cdot \sin(\theta) - \frac{16}{3} \cdot \cos^4(\theta) + \frac{8}{3} \cdot \cos(\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{16}{3} \left(1 + 2 \cos(2\theta) + \frac{\cos(4\theta)}{2} \right) d\theta - \frac{4\sqrt{3} - 10}{3} \\ &= \frac{16}{3} \cdot \left[\frac{3}{2} \theta + \sin(\theta) + \frac{1}{8} \cdot \sin(4\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{4\sqrt{3} - 10}{3} \\ &= \frac{8\pi}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3} - 10}{3} = \frac{8\pi + 3\sqrt{3} - 10}{3}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 4: Calculemos o integral

$$\iint_{\mathcal{R}} y dA$$

onde \mathcal{R} é a região representada na Figura 1.36. A curva que delimita o conjunto chama-se cardióide e, em coordenadas polares, tem equação $r = 1 + \cos \theta$.

No plano de coordenadas polares, \mathcal{R} representa-se como um conjunto \mathcal{R}^* dado por:

$$\mathcal{R}^* = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1 + \cos \theta \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

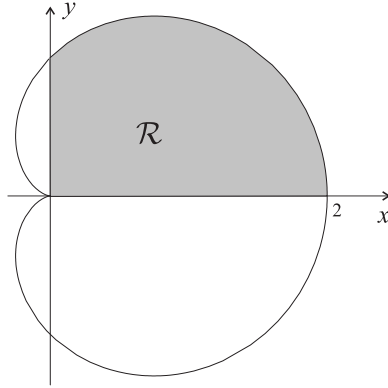


Figura 1.36 O conjunto \mathcal{R} do Exemplo 4.

Logo utilizando a mudança de variáveis em coordenadas polares tem-se:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} y \, dA &= \iint_{\mathcal{R}^*} r \operatorname{sen}(\theta) \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1+\cos(\theta)} r^2 \operatorname{sen}(\theta) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\theta) \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{1+\cos(\theta)} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{3} (1 + \cos \theta)^3 d\theta \\ &= \left[-\frac{(1 + \cos(\theta))^4}{12} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{15}{12}. \end{aligned}$$

1.8 Exercícios Propostos

1. Calcule os seguintes integrais

$$(a) \int_0^3 x^2 y \, dx;$$

$$(b) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos(x + y) \, dy;$$

$$(c) \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) \, dx;$$

$$(d) \int_1^2 (1 + 4xy) \, dx;$$

$$(e) \int_{-3}^{\sqrt{2}} (4 - x - 2y) \, dy;$$

$$(f) \int_0^1 \frac{x^3}{1 + y^2} \, dy;$$

$$(g) \int_0^1 \frac{x^3}{1 + y^2} \, dx.$$

2. Calcule os seguintes integrais

$$(a) \int_0^1 \int_{-1}^1 x \, dy \, dx;$$

$$(b) \int_{-5\pi}^{3\pi} \int_{-2}^3 \sin^2(x) \, dy \, dx;$$

$$(c) \int_1^e \int_1^{\log(2)} e^x \, dx \, dy;$$

$$(d) \int_{-1}^1 \int_0^2 x^4 y e^{x^2 y^2} \, dy \, dx;$$

$$(e) \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^1 x \sin(y) \, dx \, dy;$$

$$(f) \int_0^1 \int_0^3 x \sqrt{x^2 + y} \, dy \, dx.$$

3. Calcule os seguintes integrais

$$(a) \iint_R x \, dA, \text{ onde } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\};$$

$$(b) \iint_R e^{x+y} \, dA, \text{ onde } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2\};$$

$$(c) \iint_R (xy + 3) \, dA, \text{ onde } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge 2 \leq y \leq 3\};$$

$$(d) \iint_R e^y \, dA, \text{ onde } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2\};$$

$$(e) \iint_R \frac{y}{(x+1)^2} \, dA, \text{ onde } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 2\};$$

$$(f) \iint_R y \sec^2(xy) \, dA, \text{ onde } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \wedge 0 \leq y \leq 1\};$$

$$(g) \iint_R y \sin(xy) \, dA, \text{ onde } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \pi\};$$

$$(h) \iint_D xy \, dx \, dy, \text{ onde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 4\}.$$

4. Esboce a região de integração:

$$(a) \int_0^1 \int_0^y f(x, y) dx dy;$$

$$(c) \int_1^2 \int_0^{x^2} f(x, y) dy dx;$$

$$(b) \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx;$$

$$(d) \int_0^1 \int_{y^2}^1 f(x, y) dx dy.$$

5. Inverta a ordem de integração:

$$(a) \int_0^2 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy dx;$$

$$(b) \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx;$$

$$(c) \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx;$$

$$(d) \int_0^1 \int_{3y}^3 f(x, y) dx dy.$$

6. Calcule os seguintes integrais

$$(a) \int_0^1 \int_0^y x^2 y^3 dx dy;$$

$$(h) \int_0^1 \int_y^1 \operatorname{sen}(x^2) dx dy;$$

$$(b) \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} dy dx;$$

$$(i) \int_0^1 \int_x^1 (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} dy dx;$$

$$(c) \int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \log(xy) dy dx;$$

$$(j) \int_0^1 \int_{y^2}^1 2\sqrt{x} e^{x^2} dx dy;$$

$$(d) \int_1^3 \int_0^{x+2} \frac{x}{1+y} dy dx;$$

$$(k) \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos(x^5) dx dy;$$

$$(e) \int_0^\pi \int_{-\operatorname{sen}(x)}^{2\operatorname{sen}(x)} xy dy dx;$$

$$(l) \int_0^\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x \cos(xy) \cos^2(\pi x) dx dy;$$

$$(f) \int_{-1}^1 \int_{x^2-2}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y dy dx;$$

$$(m) \int_0^1 \int_0^{x^2} x^2 y^2 dy dx.$$

$$(g) \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy;$$

7. Seja $f(x, y)$ uma função contínua em $C \subset \mathbb{R}^2$. Determine os limites de integração do integral $\iint_C f(x, y) dx dy$, quando C é:

$$(a) C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 8x \wedge y \leq 2x \wedge y + 4x - 24 \leq 0\};$$

$$(b) C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 1\};$$

$$(c) C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 4 - y^2 \wedge x \geq 1 - \frac{y^2}{4}\}.$$

8. Seja $f(x, y)$ contínua no conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$\iint_S f(x, y) dA = \int_0^3 \int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx dy.$$

(a) Determine o conjunto S e inverta a ordem de integração.

(b) Resolva o problema supondo que $\iint_S f(x, y) dA = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{y-4}{2}} f(x, y) dx dy$.

9. Calcule os seguintes integrais:

(a) $\int_0^\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^2(x) \operatorname{sen}^2(y) dx dy$;

(b) $\iint_Q y^{-3} e^{\frac{yx}{4}} dx dy$, onde $Q = [0, t] \times [1, t]$.

10. Seja f definida em $D = [1, 2] \times [1, 4]$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+y)^{-2}, & \text{se } x \leq y \leq 2x \\ 0, & \text{nos restantes pontos de } D \end{cases}$$

Admitindo que existe $\iint_D f(x, y) dA$, calcule-o.

11. Considere o integral $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{x}{4}}^{\sqrt{8}x} dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \int_{\frac{x}{4}}^{\frac{1}{x}} dy dx$.

(a) Interprete o integral como uma área de um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ e calcule essa área.

(b) Inverta a ordem de integração.

(c) Calcule $\iint_S 2x dA$ e interprete geometricamente.

12. Calcule a área das seguintes regiões:

(a) Domínio limitado por $y^2 = 2x$ e $y = x$;

(b) Domínio limitado por $xy = 1$, $xy = 2$, $x = y$, $y = 4x$, no primeiro quadrante;

(c) Domínio limitado por $y^2 \leq 8x$, $y \leq 2x$, $y + 4x - 24 \leq 0$.

13. Determine, utilizando integrais duplos, a área do trapézio com vértices nos pontos $(1, 1)$, $(6, 1)$, $(2, 3)$ e $(5, 3)$.

14. Os seguintes integrais iterados representam o volume de um sólido. Faça um esboço do sólido e calcule o respectivo volume.

(a) $\int_0^5 \int_1^2 4 dx dy$;

$$(b) \int_0^1 \int_0^1 (2 - x - y) dy dx;$$

$$(c) \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 (x^2 + y^2) dx dy.$$

15. Calcule, utilizando integrais, o volume compreendido entre os planos $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.

16. Calcule os seguintes volumes:

(a) Volume do sólido limitado superiormente pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e inferiormente pelos planos xy , $y = -1$ e $y = 2$.

(b) Volume do sólido limitado pelo plano $x + 2y + 3z = 6$ e os planos coordenados.

(c) Volume do sólido limitado pelos planos $z = 1 + x + y$, $x = 2$, $y = 1$ e os planos coordenados.

(d) Volume do sólido do 1º octante limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, o plano $x + y = 1$ e os planos coordenados.

(e) Volume do sólido do 1º octante limitado pelo cilindro parabólico $z = x^2$ e os planos $x = 2y$, $y = 0$, $z = 0$ e $x = 2$.

17. Calcule o volume do subconjunto de \mathbb{R}^3 limitado por $z = x + y$, $z = 6$, $x = 0$, $y = 0$.

18. Interprete o integral $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2x+4y}{3} dx dy$ como volume de um sólido e calcule-o.

19. Calcule o volume da região do primeiro octante limitado pelas superfícies $z = x + y + 2$, $x^2 + y^2 = 16$ e $z = 0$.

20. Determine o volume da região de \mathbb{R}^3 limitada por $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$.

21. Calcule o volume de um dos sólidos limitados pelas superfícies $y^2 = 4x$, $z = -2 - (x^2 + y^2)$, $z = -7$.

22. Calcule o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e o plano $z = 1 - y$.

23. Calcule o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ e o plano xy .

24. Dada uma superfície plana S do plano xy cuja densidade é σ , chama-se centro de massa dessa superfície a um ponto de S cujas coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) são dadas por

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x \sigma dx dy}{\iint_S \sigma dx dy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_S y \sigma dx dy}{\iint_S \sigma dx dy}$$

Determine as coordenadas do centro de massa de uma superfície quadrangular de lado a em que a densidade em cada ponto é directamente proporcional à distância a um dos lados do quadrado.

Mudança de variáveis e coordenadas polares

1. Calcule os seguintes integrais

$$(a) \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y^2 dy dx;$$

$$(b) \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy;$$

$$(c) \iint_D (x^2 + y) dA, \text{ onde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5\};$$

$$(d) \iint_D x^2 y^3 dA, \text{ onde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}.$$

2. Determine a área da região plana $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1 \wedge (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. Determine a área da figura plana limitada por $(x-1)^2 + y^2 \geq 1$, $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$, $x \leq 2$, $y \geq 0$, $y \leq \sqrt{3}x$.

4. Calcule a área do conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}.$$

5. Calcule a área da região do 1º quadrante limitada pelas curvas $x^2 + 2y^2 = 1$, $x^2 + 2y^2 = 4$, $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$.

6. Determine o volume do sólido compreendido entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, o plano xy e o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

7. Determine o volume do sólido compreendido entre os parabolóides $3z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$.

8. Calcule o volume da região limitada por $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$ e $z \geq 0$.

9. Calcule, utilizando integrais duplos, o volume do sólido limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

10. Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies cilíndricas $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e $z^2 = 4x$.

11. Calcule o volume do sólido do interior do parabolóide $z = x^2 + y^2$, limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 9^2$ e $z = 6$.

12. Determine o volume do sólido limitado pela parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ que é interior ao parabolóide $z = x^2 + y^2$.

13. Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 2$, $z = -3$.

14. Calcule o volume do sólido do 1º octante limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = x + y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

15. Calcule o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano xy .
16. Calcule o volume do sólido limitado pela semi-esfera $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
17. Considere a função $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y)$. Verifique que é uma mudança de variáveis e, utilizando-a, calcule a área do conjunto definido pelas curvas $(x + y)^2 = 4(x - y)$ e $x - y = 1$.
18. Considere a função $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x - y^2, xy)$. Verifique que é uma mudança de variáveis e, utilizando-a, calcule o integral

$$\iint_D (x + 2y^2) xy \, dA$$

onde D é a região do 1º quadrante limitada pelas curvas $y^2 = x$, $y^2 = x - 1$, $xy = 1$ e $xy = 2$.

19. Considere a função $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x^2 - 2y^2, xy)$. Verifique que é uma mudança de variáveis e, utilizando-a, calcule o integral

$$\iint_D (x^2 - 2y^2)x^2y^2(2x^2 + 4y^2) \, dA$$

onde D é a região do 1º quadrante limitada pelas hipérbolas $x^2 - 2y^2 = 1$, $x^2 - 2y^2 = 3$, $xy = 1$ e $xy = 2$.

Capítulo 2

Integrais triplos

2.1 Integrais triplos em domínios paralelepípedicos

Utilizando um processo análogo ao da construção do integral duplo, vamos definir o integral de funções dependentes de três variáveis.

Seja P uma região paralelepípedica de \mathbb{R}^3 , isto é, o conjunto definido por:

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq a_2 \wedge b_1 \leq y \leq b_2 \wedge c_1 \leq z \leq c_2\} = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2],$$

representado na Figura 2.1.

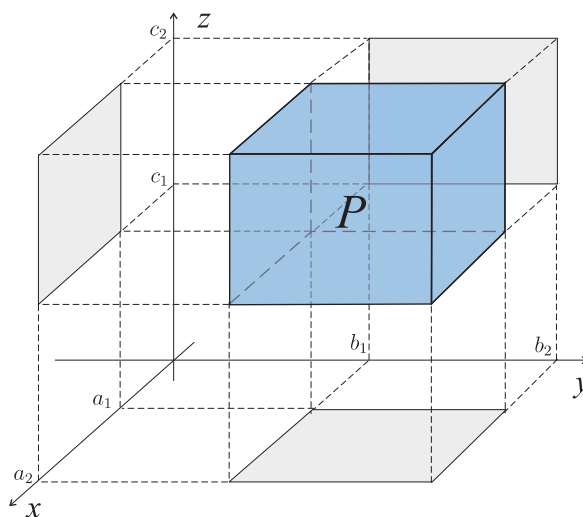


Figura 2.1 Um paralelepípedo.

De modo análogo ao processo visto no casos dos rectângulos de \mathbb{R}^2 , podemos subdividir P em "pequenos" paralelepípedos (ver Figura 2.2):

Definição 2.1.11 Dados $n + 2$ pontos $a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = a_2$, $m + 2$ pontos $b_1 = y_0 < y_1 < \dots < y_m < y_{m+1} = b_2$ e $l + 2$ pontos $c_1 = z_0 < z_1 < \dots < z_l < z_{l+1} = c_2$, ao conjunto dos $(m + 1)(n + 1)(l + 1)$ paralelepípedos da forma

$$P_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}],$$

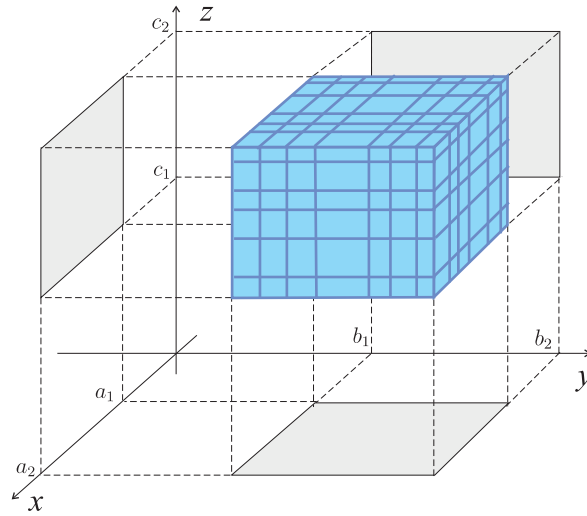


Figura 2.2 Uma partição de um paralelepípedo.

chama-se **partição** de P .

NOTA: De modo análogo ao caso das partições de rectângulos, temos:

$$P = \bigcup P_{ijk}$$

$$0 \leq i \leq n$$

$$0 \leq j \leq m$$

$$0 \leq k \leq l$$

e verificando para $P_{ijk} \neq P_{i'j'k'}$, $\text{int}(P_{ijk}) \cap \text{int}(P_{i'j'k'}) = \emptyset$.

Definição 2.1.12 Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, P um paralelepípedo contido em D e Π uma partição de P .

Chama-se **soma inferior de Darboux** de f , relativa à partição Π a

$$s_{\Pi}(f) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l V(P_{ijk}) \inf_{(x,y,z) \in P_{ijk}} f(x, y, z),$$

onde $V(P_{ijk}) = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k)$ é o volume do paralelepípedo P_{ijk} .

Da mesma forma, chama-se **soma superior de Darboux** de f , relativa à partição Π a

$$S_{\Pi}(f) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l V(P_{ijk}) \sup_{(x,y,z) \in P_{ijk}} f(x, y, z).$$

Definição 2.1.13 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e P um paralelepípedo contido em D . Diz-se que f é integrável em P se*

$$\sup_{\Pi \in \mathcal{P}} s_{\Pi}(f) = \inf_{\Pi \in \mathcal{P}} S_{\Pi}(f),$$

onde \mathcal{P} é o conjunto de todas as partições de P .

Define-se nesse caso o integral de f em P por:

$$\iiint_P f(x, y, z) dV = \sup_{\Pi \in \mathcal{P}} s_{\Pi}(f) = \inf_{\Pi \in \mathcal{P}} S_{\Pi}(f).$$

Tal como no caso dos integrais duplos, pode provar-se o seguinte:

Proposição 6 *Seja P um paralelepípedo. Se f é contínua em P então f é integrável em P .*

O integral triplo verifica as mesmas propriedades que o integral duplo:

Proposição 7 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.*

1. *Seja $P = P_1 \cup P_2$ um paralelepípedo reunião de dois paralelepípedos P_1 e P_2 tais que $\text{int}(P_1) \cap \text{int}(P_2) = \emptyset$. Se f é integrável em P_1 e em P_2 , então f é integrável em P e*

$$\iiint_P f dV = \iiint_{P_1} f dV + \iiint_{P_2} f dV.$$

2. *Seja f integrável num paralelepípedo P . Então $|f|$ é integrável em P e*

$$\left| \iiint_P f dV \right| \leq \iiint_P |f| dV.$$

3. *Seja $f \geq 0$ uma função integrável num paralelepípedo P . Então*

$$\iiint_P f dV \geq 0.$$

4. *Sejam f_1 e f_2 duas funções integráveis num paralelepípedo P , e seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Então*

$$\iiint_P (f_1 + cf_2) dV = \iiint_P f_1 dV + c \iiint_P f_2 dV.$$

2.2 Teorema de Fubini e integral triplo iterado

Como no caso dos integrais duplos, um método prático para calcular os integrais triplos é escrevê-los na forma de integrais iterados. O Teorema de Fubini generaliza-se aos integrais triplos da forma seguinte:

Teorema 2.2.6 (Teorema de Fubini) *Seja $f : P = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

$$\begin{aligned} \iiint_P f(x, y, z) dV &= \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz dy dx = \int_{a_1}^{a_2} \int_{c_1}^{c_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y, z) dy dz dx \\ &= \dots = \int_{c_1}^{c_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

NOTAS:

1. O Teorema de Fubini garante-nos que há 6 maneiras de calcular $\iiint_P f dV$: a ordem de integração é irrelevante.
2. Consideremos, por exemplo, o primeiro integral iterado do teorema:

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Este calcula-se de modo similar aos integrais iterados duplos:

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz dy dx = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Começando por integrar em ordem a z e considerando as variáveis x e y como constantes:

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz = A(x, y),$$

a seguir integrando o resultado em ordem a y considerando a variável x constante:

$$\int_{b_1}^{b_2} A(x, y) dy = B(x),$$

para finalmente integrar o resultado em ordem a x :

$$\int_{a_1}^{a_2} B(x) dx = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

3. Nos cálculos anteriores admitiu-se que sendo f contínua para todo x a função $A(x, y)$ é contínua em ordem a y , e $B(x)$ também é contínua. Sendo assim, faz sentido integrar essas funções.

EXEMPLO 1: Calculemos o integral $\int_0^2 \int_1^3 \int_0^1 (x^2y + 2z^3) dz dx dy$:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_1^3 \int_0^1 (x^2y + 2z^3) dz dx dy &= \int_0^2 \int_1^3 \left[x^2yz + \frac{z^4}{2} \right]_0^1 dx dy = \int_0^2 \int_1^3 \left(x^2y + \frac{1}{2} \right) dx dy \\ &= \int_0^2 \left[y \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} \right]_1^3 dy = \int_0^2 \left(\frac{26}{3}y + 1 \right) dy = \left[\frac{26}{6}y^2 + y \right]_0^2 = \frac{58}{3}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2: Calculemos o integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \operatorname{sen}(y) \operatorname{tg}(z) dx dz dy$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \operatorname{sen}(y) \operatorname{tg}(z) dx dz dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\operatorname{sen}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(y) \operatorname{tg}(z) dz dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\log(\cos(z)) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(y) dy = \log(\sqrt{2}) \left[-\cos(y) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \log(2). \end{aligned}$$

EXEMPLO 3: Calculemos o integral $\int_0^1 \int_{-1}^2 \int_0^3 xyz^2 dz dy dx$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-1}^2 \int_0^3 xyz^2 dz dy dx &= \int_0^1 \int_{-1}^2 \left[xy \frac{z^3}{3} \right]_0^3 dy dx = \int_0^1 \int_{-1}^2 9xy dy dx \\ &= \int_0^1 \left[9x \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^2 dx = \int_0^1 \frac{27}{2}x dx = \left[\frac{27}{4}x^2 \right]_0^1 = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 4: Calculemos o integral $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^1 (xz - y^3) dz dy dx$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^1 (xz - y^3) dz dy dx &= \int_{-1}^1 \int_0^2 \left[x \frac{z^2}{2} - y^3z \right]_0^1 dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^2 \left(\frac{x}{2} - y^3 \right) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[y \frac{x}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^2 dx = \int_{-1}^1 (x - 4) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 4x \right]_{-1}^1 = -8. \end{aligned}$$

EXEMPLO 5: Calculemos o integral $I = \iiint_P yz \operatorname{sen}(xy) dV$. Vamos ver neste exemplo que uma

escolha correcta da **ordem de integração** pode facilitar os cálculos.

Sendo a função integranda contínua, pelo Teorema de Fubini tem-se:

$$I = \int_1^2 \int_0^\pi \int_0^1 yz \operatorname{sen}(xy) dz dy dx = \int_1^2 \int_0^\pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 y \operatorname{sen}(xy) dy dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy) dy dx.$$

Integrando por partes o integral em y tem-se:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\left[-y \frac{\cos(xy)}{x} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\frac{\cos(xy)}{x} \right) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(-\frac{\pi \cos(\pi x)}{x} + \left[\frac{\text{sen}(xy)}{x^2} \right]_0^\pi \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(-\frac{\pi \cos(\pi x)}{x} + \frac{\text{sen}(\pi x)}{x^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Primitivando por partes tem-se:

$$P\left(-\frac{\pi \cos(\pi x)}{x}\right) = -\frac{\text{sen}(\pi x)}{x} + P\left(-\frac{\text{sen}(\pi x)}{x^2}\right),$$

logo:

$$P\left(-\frac{\pi \cos(\pi x)}{x} + \frac{\text{sen}(\pi x)}{x^2}\right) = -\frac{\text{sen}(\pi x)}{x} + C.$$

Finalmente, pela regra de Barrow tem-se:

$$I = \frac{1}{2} \left[-\frac{\text{sen}(\pi x)}{x} \right]_1^2 = 0.$$

Note-se que pelo Teorema de Fubini, mudando a ordem de integração para:

$$I = \int_0^\pi \int_1^2 \int_0^1 yz \text{sen}(xy) dz dx dy,$$

o integral é muito mais fácil de calcular:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \int_1^2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 y \text{sen}(xy) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[-\cos(xy) \right]_1^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(y) - \cos(2y)) dy = \frac{1}{2} \left[\text{sen}(y) - \frac{\text{sen}(2y)}{2} \right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

2.3 Integrais triplos em domínios gerais

Seja $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto limitado. Define-se o integral triplo em \mathcal{S} de modo semelhante ao utilizado para o integral duplo.

Consideremos $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Para definir o integral triplo de f no conjunto \mathcal{S} , começamos por substituir f pela função \bar{f} definida da seguinte maneira:

$$\bar{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{se } (x, y, z) \in \mathcal{S}, \\ 0, & \text{se } (x, y, z) \in P \setminus \mathcal{S}, \end{cases}$$

onde P é um paralelepípedo que contém \mathcal{S} . A função \bar{f} está definida em P , portanto, considerar a sua integrabilidade sobre o paralelepípedo P faz todo o sentido (ver Figura 2.3).

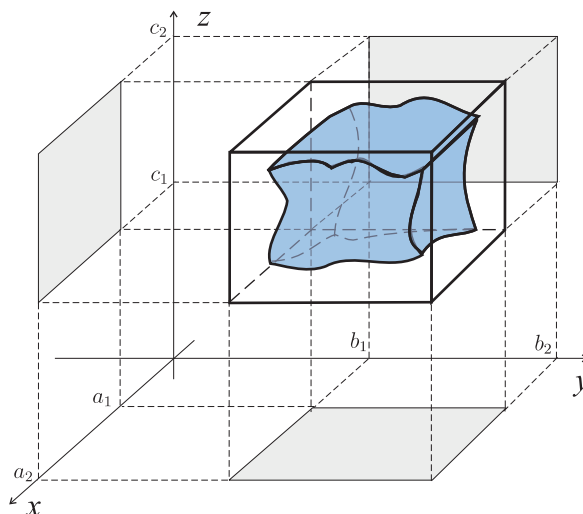


Figura 2.3 O domínio e um paralelepípedo que o contém.

Definição 2.3.14 A função f é *integrável* em S se \bar{f} for integrável no paralelepípedo P . Nesse caso, temos:

$$\iiint_S f \, dV = \iiint_P \bar{f} \, dV.$$

NOTAS:

1. Na realidade, é sempre este o caso se f for contínua no conjunto S e se a fronteira de S for *regular*. Veremos na secção seguinte exemplos de tais conjuntos e como calcular os seus integrais.
2. Como vimos no caso do integral duplo, a definição do integral triplo de f em S não depende da escolha do paralelepípedo P .

2.3.1 Conjuntos básicos de \mathbb{R}^3

No âmbito deste curso, o cálculo de integrais triplos será somente feito em certos tipos de conjuntos, que designaremos por **conjuntos básicos**, e que passamos a definir.

Definição 2.3.15 Uma região $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se de **tipo I** se existirem um conjunto básico, C , de \mathbb{R}^2 , e duas funções contínuas, u_1, u_2 , de $C \rightarrow \mathbb{R}$ tais que S esteja limitado superiormente pelo gráfico de u_2 e inferiormente pelo gráfico de u_1 :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C \wedge u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

EXEMPLO 1: Os conjuntos

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 2 \leq y \leq 4 \wedge x^2 \leq z \leq x^2 y\}$$

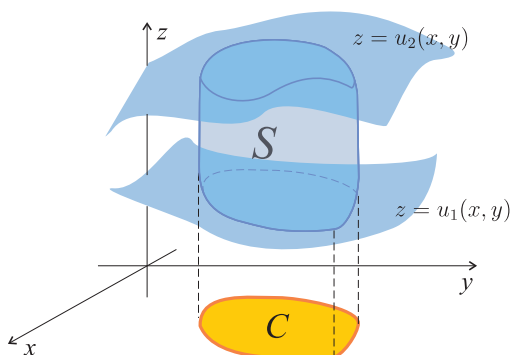


Figura 2.4 Um conjunto básico do tipo I.

e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 \leq x \leq y \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge xy \leq z \leq x\}$$

são conjuntos de tipo I (ver Figura 2.5).

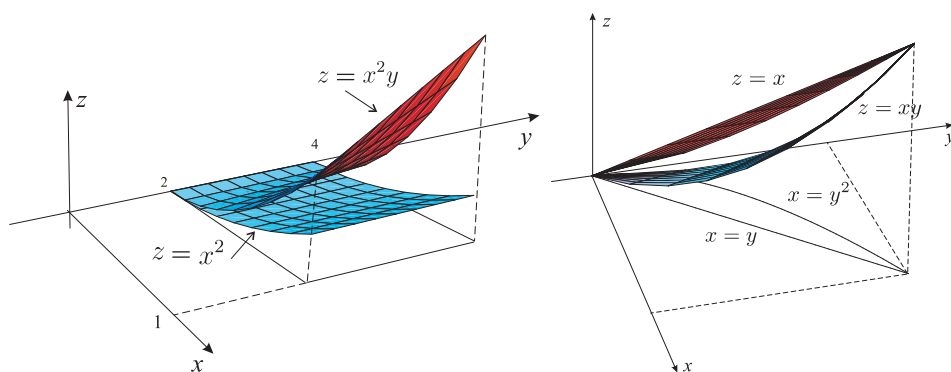


Figura 2.5 Conjuntos básicos do tipo I.

Veremos a seguir como calcular integrais nestes conjuntos. Temos o resultado seguinte:

Proposição 8 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $S \subset D$ é uma região de tipo I então*

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \iint_C \left(\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA.$$

Demonstração: Vamos demonstrar o resultado no caso em que C é um conjunto verticalmente simples de \mathbb{R}^2 :

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq a_2 \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

O raciocínio no caso de um conjunto C horizontalmente simples é idêntico.

Sendo S limitado é possível encontrar um paralelepípedo P ,

$$P = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$$

que contém \mathcal{S} .

Sendo f contínua e o conjunto \mathcal{S} de fronteira regular tem-se que f é integrável em \mathcal{S} e por definição:

$$\iiint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dV = \iiint_P \bar{f}(x, y, z) dV,$$

onde \bar{f} é definida por:

$$\bar{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{se } (x, y, z) \in \mathcal{S}, \\ 0, & \text{se } (x, y, z) \in P \setminus \mathcal{S}. \end{cases}$$

Note-se que por definição de \bar{f} , para todo $x \in [a_1, a_2]$, $y \in [b_1, g_1(x)[\cup]g_2(x), b_2]$ e $z \in [c_1, c_2]$, temos $\bar{f}(x, y, z) = 0$.

Logo para $x \in [a_1, a_2]$ e $y \in [b_1, g_1(x)[\cup]g_2(x), b_2]$ tem-se:

$$\int_{c_1}^{c_2} \bar{f}(x, y, z) dz = 0,$$

o que nos permite concluir que para $x \in [a_1, a_2]$,

$$\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} \bar{f}(x, y, z) dz \right) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{c_1}^{c_2} \bar{f}(x, y, z) dz \right) dy.$$

Por definição de \bar{f} tem-se de modo análogo que para todo $x \in [a_1, a_2]$, $y \in [g_1(x), g_2(x)]$ e para $z \in [c_1, u_1(x, y)[\cup]u_2(x, y), c_2]$: $\bar{f}(x, y, z) = 0$. Logo para tais valores de x e y tem-se:

$$\int_{c_1}^{c_2} \bar{f}(x, y, z) dz = \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} \bar{f}(x, y, z) dz = \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

logo para $x \in [a_1, a_2]$,

$$\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} \bar{f}(x, y, z) dz \right) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy.$$

Os cálculos anteriores e o Teorema de Fubini permitem-nos concluir que:

$$\begin{aligned} \iiint_P \bar{f}(x, y, z) dV &= \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} \bar{f}(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_{a_1}^{a_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

EXEMPLO 2: Calculemos o integral $\iiint_S dV$ onde o sólido S é dado por:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 - x^2 \wedge 1 - xy \leq z \leq 1 + x + y\}$$

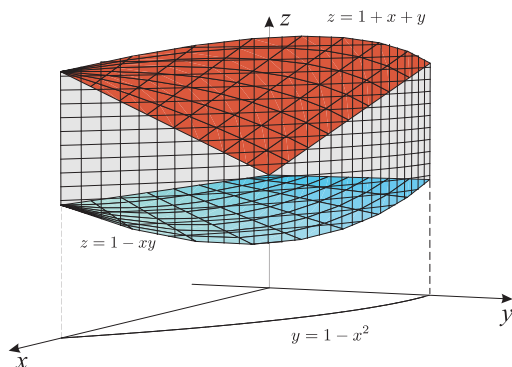


Figura 2.6 O domínio de integração do Exemplo 2 é um conjunto básico do tipo I.

(ver Figura 2.6). S é de tipo I, logo pela proposição anterior:

$$\begin{aligned}
 \iiint_S dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_{1-xy}^{1+x+y} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} [z]_{1-xy}^{1+x+y} dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (x+y+xy) dy dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}(1+x) \right]_0^{1-x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \left(x(1-x^2) + \frac{(1-x^2)^2}{2}(1+x) \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} + \frac{x^4}{2} - 2x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{3}{5}.
 \end{aligned}$$

Definição 2.3.16 Uma região $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se de **tipo II** se existir um conjunto básico, C , de \mathbb{R}^2 , e v_1, v_2 duas funções contínuas de $C \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in C \wedge v_1(y, z) \leq x \leq v_2(y, z)\}.$$

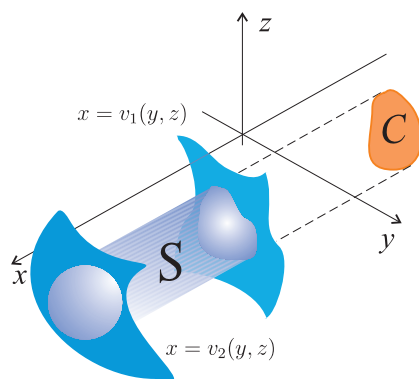


Figura 2.7 Um conjunto básico do tipo II.

Por meio de um raciocínio análogo ao que foi feito para as regiões de tipo I, prova-se:

Proposição 9 Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $\mathcal{S} \subset D$ é uma região de tipo II então

$$\iiint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dV = \iint_C \left(\int_{v_1(y, z)}^{v_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dA.$$

Temos que considerar um último tipo de regiões:

Definição 2.3.17 Uma região $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ diz-se de **tipo III** se existir um conjunto básico, C , de \mathbb{R}^2 , e w_1, w_2 duas funções contínuas de $C \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in C \wedge w_1(x, z) \leq y \leq w_2(x, z)\}.$$

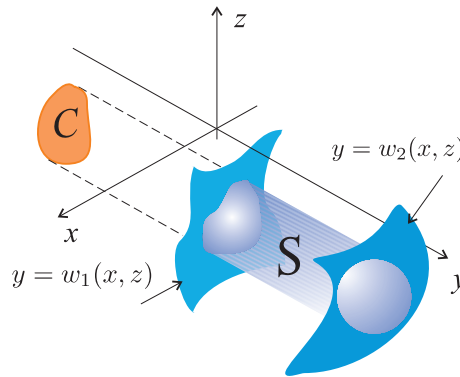


Figura 2.8 Um conjunto básico do tipo III.

Proposição 10 Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $\mathcal{S} \subset D$ é uma região de tipo III então

$$\iiint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dV = \iint_C \left(\int_{w_1(x, z)}^{w_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dA.$$

NOTA: Um paralelepípedo é simultaneamente um conjunto de tipo I, II e III. Quando isso acontece dizemos que o conjunto é **misto**.

EXEMPLO 1: Uma esfera é um conjunto misto. Consideremos a esfera E de equação $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Então

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1 \wedge -\sqrt{1 - y^2 - z^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2 - z^2}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge -\sqrt{1 - x^2 - z^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2 - z^2}\}, \end{aligned}$$

logo E é de tipo I, II e III.

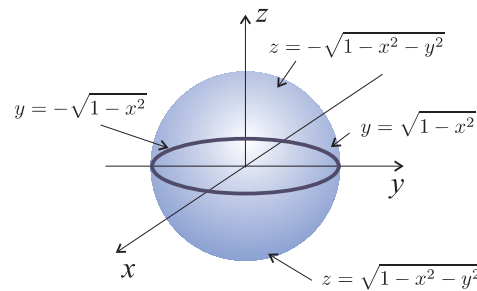


Figura 2.9 Um conjunto básico do tipo misto.

EXEMPLO 2: O conjunto de tipo I:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \wedge \sqrt{x} \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1 - y\}$$

é um conjunto misto; verifica-se que é de tipo II e III:

$$\begin{aligned} C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1 - y \wedge 0 \leq x \leq y^2\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x} \wedge \sqrt{x} \leq y \leq 1 - z\}. \end{aligned}$$

2.3.2 Aplicação ao cálculo de volumes

Proposição 11 *Seja $S \in \mathbb{R}^3$ um sólido (de fronteira regular). O volume V de S é:*

$$V = \iiint_S dV.$$

Demonstração: A prova do caso geral está fora do âmbito deste curso. Vamos demonstrar este resultado no caso em que S é um conjunto de tipo I:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C \wedge u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

S é o sólido limitado superiormente pelo gráfico de $z = u_1(x, y)$ e inferiormente pelo gráfico de $z = u_2(x, y)$, para valores de (x, y) na região C do plano xy . Podemos calcular o volume V de S utilizando um integral duplo:

$$V = \iint_C (u_1(x, y) - u_2(x, y)) dA.$$

Note que pela regra de Barrow:

$$u_1(x, y) - u_2(x, y) = \left[z \right]_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} = \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} dz.$$

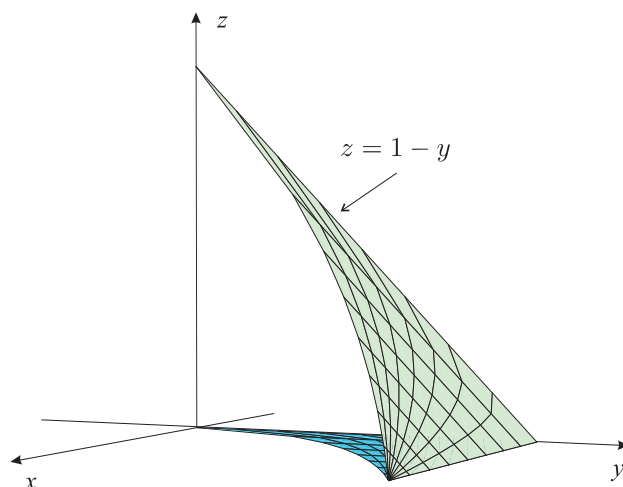


Figura 2.10

Logo:

$$V = \iint_C \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} dz dA = \iiint_S dV,$$

pelo resultado sobre o cálculo de integrais triplos em conjuntos de tipo I. ■

EXEMPLO 1: Cálculo do volume do sólido S :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \wedge \sqrt{x} \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1 - y\}$$

é um conjunto de tipo I (ver Figura 2.10), logo o seu volume V é dado por:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_S dV = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} dz dy dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 (1-y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{x}}^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2: Cálculo do volume V do sólido S interior ao parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$ e ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e limitado inferiormente pelo plano $z = 0$ (ver Figura 2.11).

Temos:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$$

logo o conjunto é de tipo I. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Tem-se:

$$V = \iint_D \int_0^{2-x^2-y^2} dz dA = \iint_D (2 - x^2 - y^2) dA.$$

Utilizando a mudança de variáveis para coordenadas polares nos integrais duplos temos:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 - r^2) r dr d\theta = 2\pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{2}.$$

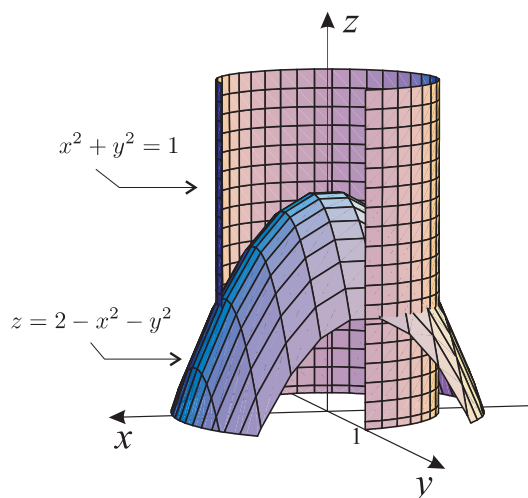


Figura 2.11

EXEMPLO 3: Cálculo do volume V do sólido S limitado, no 1º octante, pelo parabolóide $z = 2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ (ver Figura 2.12).

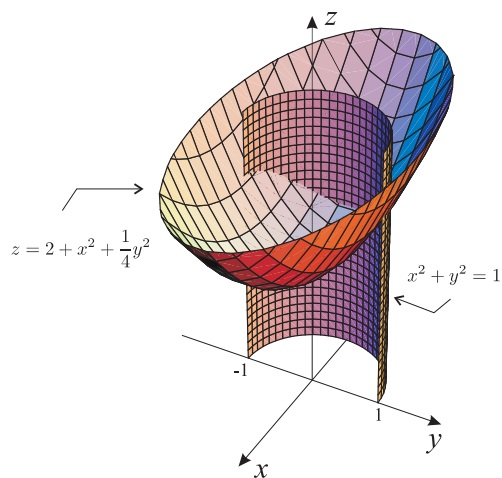


Figura 2.12

Temos:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2\}$$

logo o conjunto é de tipo I. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ com $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Tem-se:

$$V = \iint_D \int_0^{2+x^2+\frac{1}{4}y^2} dz dA = \iint_D (2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2) dA.$$

Utilizando a mudança de variáveis para coordenadas polares nos integrais duplos temos:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (2 + r^2 \cos^2(\theta) + \frac{1}{4} r^2 \sin^2(\theta)) r \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (2r + r^3 - \frac{3}{4} r^3 \sin^2(\theta)) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[r^2 + \frac{r^4}{4} - \frac{3}{16} r^4 \sin^2(\theta) \right]_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{16} \sin^2(\theta) \right) d\theta \\ &= \left[\frac{5}{4} \theta - \frac{3}{32} \left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{37\pi}{64}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 4: Vamos calcular o volume V do elipsóide S de equação $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ (ver Figura 2.13).

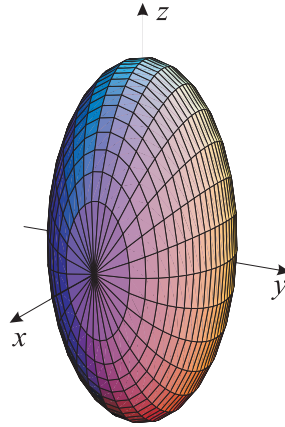


Figura 2.13 O elipsóide é um conjunto básico do tipo I.

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, o círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ com $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Então

$$V = 8 \iint_D \int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dA = \iint_D 2\sqrt{4-x^2-y^2} \, dA.$$

Utilizando a mudança de variáveis para coordenadas polares nos integrais duplos temos:

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 2\sqrt{4-r^2} r \, dr \, d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{16}{3} d\theta = \frac{64\pi}{3}.$$

NOTA: A seguir veremos que a técnica que acabamos de utilizar nos três últimos exemplos pode ser vista como uma mudança de variável em \mathbb{R}^3 para coordenadas cilíndricas.

2.4 Mudança de variável nos integrais triplos

Consideremos \mathcal{R} e \mathcal{S} dois conjuntos básicos de \mathbb{R}^3 . Seja $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ uma função vectorial definida por:

$$T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)), \quad \forall (u, v, w) \in \mathcal{S}.$$

Se T for diferenciável em (u_0, v_0, w_0) podemos definir o seu jacobiano nesse ponto:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}(u_0, v_0, w_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}_{(u_0, v_0, w_0)}$$

Teorema 2.4.7 *Sejam $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ uma função vectorial tal que $T(\mathcal{S}) = \mathcal{R}$ e*

- (i) T é de classe C^1 ,
- (ii) T é injectiva no interior de \mathcal{S} ,
- (iii) o jacobiano de T não se anula em $\text{int}(\mathcal{S})$:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}(u_0, v_0, w_0) \neq 0, \quad \forall (u_0, v_0, w_0) \in \text{int}(\mathcal{S}).$$

Então

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dV = \iiint_{\mathcal{S}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

2.4.1 Coordenadas cilíndricas

As coordenadas cilíndricas combinam as coordenadas polares no plano xy com o eixo dos zz . Representam um ponto P no espaço por um terno ordenado (r, θ, z) , onde r e θ são as coordenadas polares da projecção vertical de P no plano xy e z é a coordenada cartesiana vertical (ver Figura 2.14).

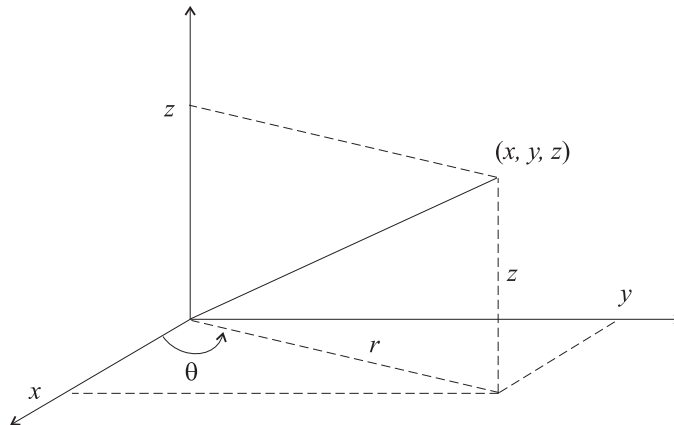


Figura 2.14 A interpretação geométrica das coordenadas cilíndricas.

As equações que relacionam as coordenadas cartesianas com as coordenadas cilíndricas são

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \operatorname{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \operatorname{tg}(\theta) = \frac{y}{x} \end{cases}$$

onde $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

No caso das coordenadas cilíndricas a função de substituição tem a seguinte expressão:

$$T : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(r, \theta, z) = (x(r, \theta), y(r, \theta), z) = (r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta), z).$$

T é sobrejectiva, é injectiva em $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ e o jacobiano não se anula neste conjunto:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \operatorname{sen}^2(\theta) = r.$$

Pelo Teorema 2.4.7, a fórmula de mudança de variável para coordenadas cilíndricas escreve-se:

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dV = \iiint_{\mathcal{R}^*} f(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta), z) r dr d\theta dz,$$

onde o conjunto \mathcal{R}^* é o conjunto \mathcal{R} descrito em coordenadas cilíndricas.

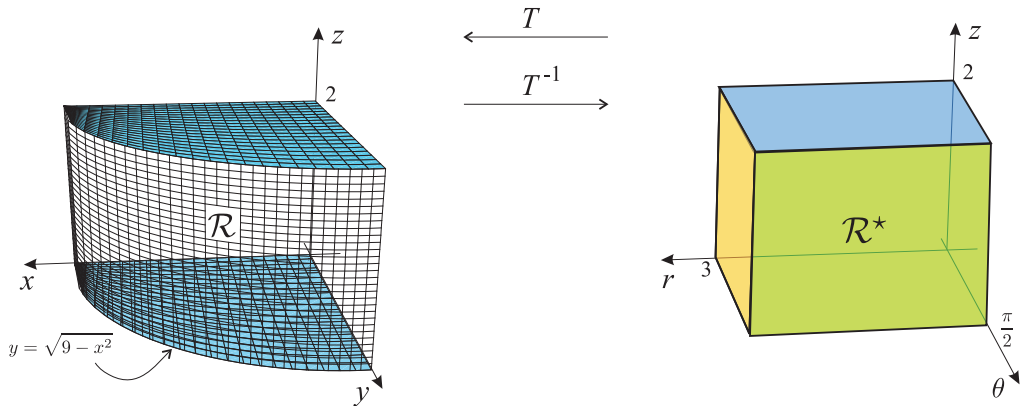


Figura 2.15 O domínio de integração do Exemplo 1.

EXEMPLO 1: Cálculo de $I = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^2 \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx$ utilizando coordenadas cilíndricas. O conjunto de integração é:

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \wedge 0 \leq z \leq 2\}.$$

\mathcal{R} é o sólido do primeiro octante limitado superiormente pelo plano $z = 2$ e inferiormente pelo disco $x^2 + y^2 \leq 9$. Em coordenadas cilíndricas o sólido está definido por:

$$\mathcal{R}^* = \{(r, \theta, z) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} : 0 \leq r \leq 3 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq z \leq 2\}$$

(ver Figura 2.15).

A fórmula de mudança de variáveis em coordenadas cilíndricas permite escrever:

$$I = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \sqrt{r^2} r \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^3 d\theta \, dz = 9\pi.$$

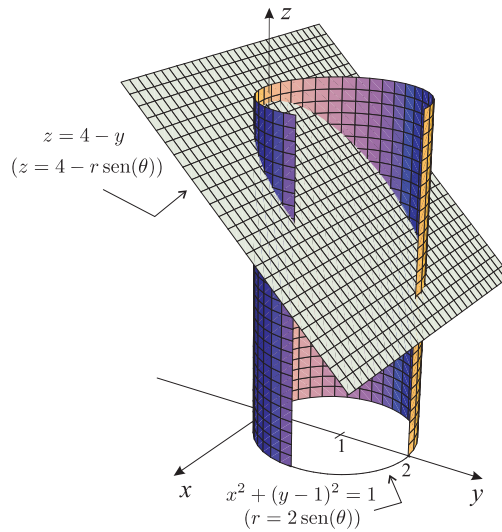


Figura 2.16 O domínio de integração do Exemplo 2.

EXEMPLO 2: Calculemos o volume do cilindro circular recto limitado inferiormente pela circunferência de equação $x^2 + (y-1)^2 = 1$ e superiormente pelo plano $z = 4 - y$ (ver Figura 2.16). Em coordenadas cilíndricas o sólido está definido por:

$$\mathcal{R}^* = \{(r, \theta, z) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} : 0 \leq r \leq 2 \operatorname{sen}(\theta) \wedge 0 \leq \theta \leq \pi \wedge 0 \leq z \leq 4 - r \operatorname{sen}(\theta)\}$$

O volume é

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \int_0^{2 \operatorname{sen}(\theta)} \int_0^{4 - r \operatorname{sen}(\theta)} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^{2 \operatorname{sen}(\theta)} r [z]_0^{4 - r \operatorname{sen}(\theta)} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2 \operatorname{sen}(\theta)} (4r - r^2 \operatorname{sen}(\theta)) \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \left[2r^2 - \frac{r^3}{3} \operatorname{sen}(\theta) \right]_0^{2 \operatorname{sen}(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(8 \operatorname{sen}^2(\theta) - \frac{8}{3} \operatorname{sen}^4(\theta) \right) d\theta = \int_0^\pi \left(4(1 - \cos(2\theta)) - \frac{2}{3}(1 - \cos(2\theta))^2 \right) d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(4 - 4 \cos(2\theta) - \frac{2}{3}(1 - 2 \cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)) \right) d\theta = \int_0^\pi \left(3 - \frac{8}{3} \cos(2\theta) - \frac{1}{3} \cos(4\theta) \right) d\theta \\ &= \left[3\theta - \frac{4}{3} \operatorname{sen}(2\theta) - \frac{1}{12} \operatorname{sen}(4\theta) \right]_0^\pi = 3\pi. \end{aligned}$$

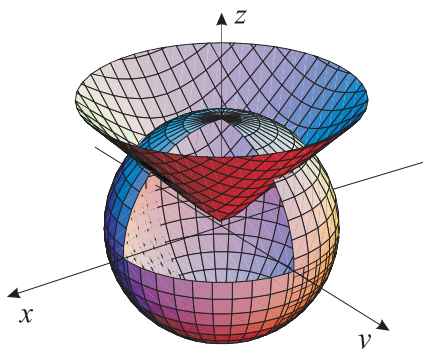


Figura 2.17 O domínio de integração do Exemplo 3.

EXEMPLO 3: Cálculo do volume V do sólido S limitado pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e o cone de equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ver Figura 2.17).

A projecção no plano $z = 0$ da intersecção entre a esfera e o cone é a circunferência de equação $2r^2 = 1$, logo a expressão de S em coordenadas cilíndricas é:

$$S = \{(r, \theta, z) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} : 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge 0 \leq \theta < 2\pi \wedge r \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}\},$$

logo:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r(\sqrt{1-r^2} - r) \, dr \, d\theta \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2r\sqrt{1-r^2} - 2r^2) \, dr = \pi \left[\frac{2}{3} \left(-(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - r^3 \right) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

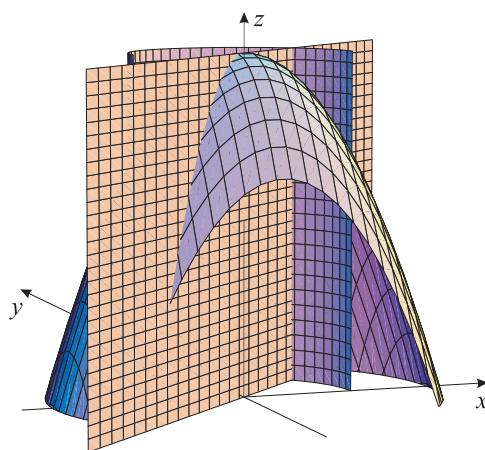


Figura 2.18 O domínio de integração do Exemplo 4.

EXEMPLO 4: Cálculo do volume V do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $y = x$, $y = 0$ e $z = 0$ (ver Figura 2.18).

Em coordenadas cilíndricas, as respectivas equações destes conjuntos são: $z = 4 - r^2$, $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = 0$. Logo podemos escrever a expressão de S :

$$S = \{(r, \theta, z) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \wedge 0 \leq z \leq 4 - r^2\},$$

e o volume de S é dado por:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_0^{4-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (4 - r^2) r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{4} \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{7\pi}{16}.$$

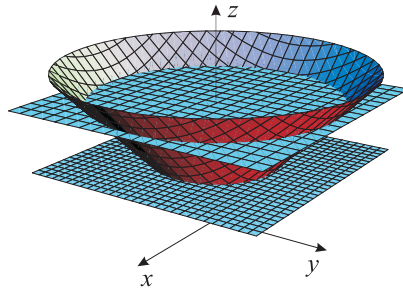


Figura 2.19 O domínio de integração do Exemplo 5.

EXEMPLO 5: Cálculo do volume V do sólido S limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e os planos $z = 1$ e $z = 2$ (ver Figura 2.19).

Em coordenadas cilíndricas, a equação do cone é $z = r$. Podemos escrever a expressão de S como união dos conjuntos S_1 e S_2 :

$$S_1 = \{(r, \theta, z) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} : 1 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta < 2\pi \wedge r \leq z \leq 2\}$$

$$S_2 = \{(r, \theta, z) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq \theta < 2\pi \wedge 1 \leq z \leq 2\},$$

e o volume de S é dado pela soma dos volumes de S_1 e S_2 :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_r^2 r \, dz \, dr \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^2 r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r [z]_r^2 \, dr \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 r [z]_1^2 \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r(2 - r) \, dr \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_1^2 \, d\theta + \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} \, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, d\theta = \frac{4\pi}{3} + \pi = \frac{7\pi}{3}. \end{aligned}$$

2.4.2 Coordenadas esféricas

As equações que relacionam as coordenadas cartesianas com as coordenadas esféricas são

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \\ y = r \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ z = r \cos(\varphi) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \operatorname{tg}(\theta) = \frac{y}{x} \\ \cos(\varphi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

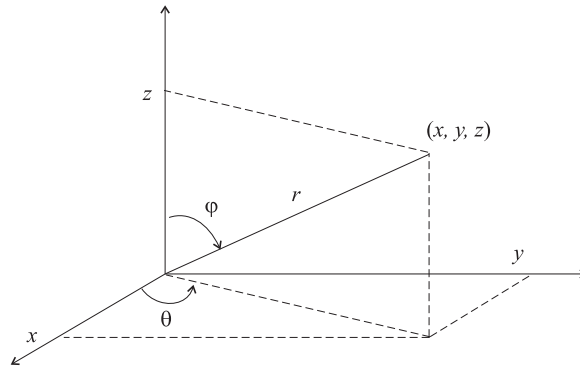


Figura 2.20 O significado das coordenadas esféricas.

onde $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ e $0 \leq \varphi \leq \pi$.

No caso das coordenadas esféricas a função de substituição tem a seguinte expressão:

$$T : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(r, \theta, \varphi) = (x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)) = (r \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), r \cos(\varphi)).$$

T é uma bijecção de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$. O jacobiano tem a seguinte expressão:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi) & -r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) & r \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) & r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -r \operatorname{sen}(\varphi) \end{vmatrix} = -r^2 \operatorname{sen}(\varphi).$$

Como $\operatorname{sen}(\varphi) \geq 0$ para $0 \leq \varphi \leq \pi$, a fórmula de mudança de variável para coordenadas esféricas escreve-se:

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dV = \iiint_{\mathcal{R}^*} f(r \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), r \cos(\varphi)) r^2 \operatorname{sen}(\varphi) dr d\theta d\varphi,$$

onde o conjunto \mathcal{R}^* é o conjunto \mathcal{R} descrito em coordenadas esféricas.

EXEMPLO 1: Calculemos o integral $I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{4-x^2-y^2} dz dy dx$ utilizando coordenadas esféricas.

O conjunto de integração é dado por:

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}.$$

\mathcal{R} é o sólido no primeiro octante limitado superiormente pela esfera de centro na origem e raio 2. Visto em coordenadas esféricas \mathcal{R} é descrito por:

$$\mathcal{R}^* = \{(r, \theta, \varphi) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi]: 0 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

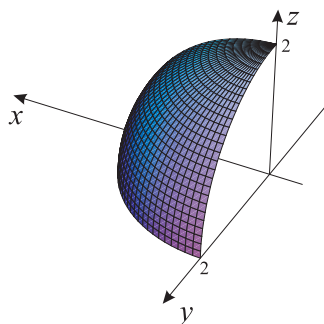


Figura 2.21

Pela fórmula de mudança de variáveis em coordenadas esféricas tem-se:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos(\varphi) \sqrt{4 - r^2 \sin^2(\varphi)} r^2 \sin(\varphi) d\varphi dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \sqrt{4 - r^2 \sin^2(\varphi)} d\varphi dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^2 r \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (4 - r^2 \sin^2(\varphi))^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \frac{\pi}{6} \int_0^2 \left(-r(4 - r^2)^{\frac{3}{2}} + 8r \right) dr \\ &= \frac{\pi}{6} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} (4 - r^2)^{\frac{5}{2}} + 4r^2 \right]_0^2 = \frac{8\pi}{5} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2: Calculemos o volume do sólido limitado inferiormente pela esfera de equação $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

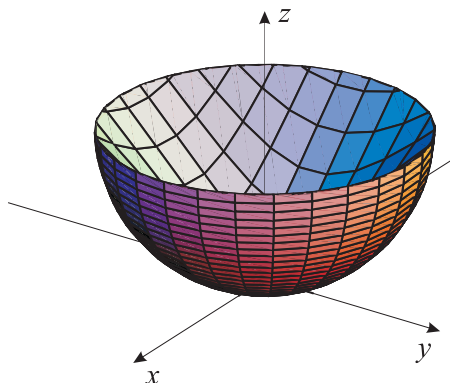


Figura 2.22

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos(r)} r^2 \operatorname{sen}(\varphi) dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \operatorname{sen}(\varphi) \right]_0^{2\cos(r)} d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} \cos^3(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^4(\varphi)}{4} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \frac{1}{16} d\theta = \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

EXEMPLO 3: Cálculo do volume V do sólido S limitado pela esfera de equação $r = 1$ e o cone de equação $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

A expressão de S em coordenadas esféricas é dada por:

$$S = \{(r, \theta, \varphi) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\},$$

logo:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r^2 [-\cos(\varphi)]_0^{\frac{\pi}{4}} dr \\
 &= 2\pi \int_0^1 r^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dr = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).
 \end{aligned}$$

Note que o resultado é idêntico ao do EXEMPLO 3 das coordenadas cilíndricas.

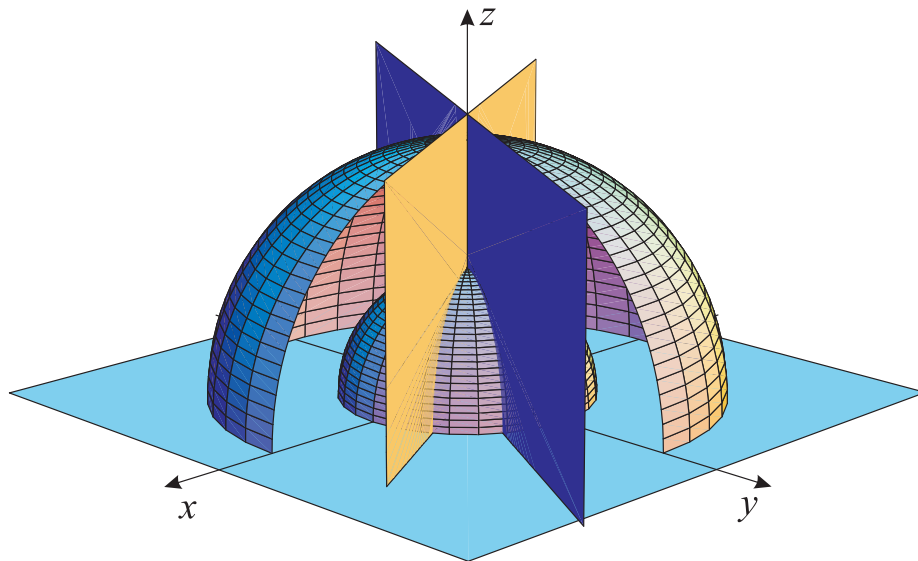


Figura 2.23

EXEMPLO 4: Cálculo do volume V do sólido S , do primeiro quadrante, limitado pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e os planos $y = \sqrt{3}x$ e $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Em coordenadas esféricas, as respectivas equações destes conjuntos são: $r = 1$, $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Logo S tem a seguinte expressão nas coordenadas esféricas:

$$S = \{(r, \theta, \varphi) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] : 1 \leq r \leq 2 \wedge \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \wedge 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\},$$

consequentemente o volume de S é dado por:

$$V = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \operatorname{sen}(\varphi) \, d\varphi \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{6} \int_1^2 r^2 [-\cos(\varphi)]_0^{\frac{\pi}{2}} \, dr = \frac{7\pi}{18}.$$

2.5 Exercícios Propostos

1. Calcule os seguintes integrais

- (a) $\int_0^3 \int_1^2 \int_{-2}^2 (4 - x^2 y z) dx dy dz;$ (d) $\int_1^2 \int_{-1}^2 \int_3^4 (z + 4xy) dx dz dy;$
 (b) $\int_{-\pi/4}^{\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi} \int_0^2 z \cos(x + y) dz dy dx;$ (e) $\int_{-3}^{\sqrt{2}} \int_0^1 \int_0^2 (4z - x - 2y) dy dz dx;$
 (c) $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_{-3}^3 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz;$ (f) $\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^3 \frac{zx^3}{1 + y^2} dx dy dz.$

2. Calcule os seguintes integrais

- (a) $\int_0^1 \int_1^x \int_{-2}^y (4z - x^2 y) dz dy dx;$ (d) $\int_0^2 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^x dy dz dx;$
 (b) $\int_{-\pi/4}^{\pi} \int_x^{\pi} \int_0^y y \cos(x) dz dy dx;$ (e) $\int_{-3}^{\sqrt{2}} \int_0^x \int_0^z (4z - x - 2y) dy dz dx;$
 (c) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z dz dy dx;$ (f) $\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^y \frac{zx^3}{1 + y^2} dx dy dz.$

3. Calcule os seguintes integrais

- (a) $\iiint_D \log(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dV$, onde D é o subconjunto de \mathbb{R}^3 limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, e acima do plano xy ;
 (b) $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dV$, onde D é o subconjunto de \mathbb{R}^3 definido pelas condições $0 \leq z \leq 5$ e $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$;
 (c) $\iiint_D y dV$, onde D é o subconjunto de \mathbb{R}^3 limitado pelos parabolóides $z = 3 - x^2 - y^2$ e $z = -5 + x^2 + y^2$, com $x \geq 0$ e $y \geq 0$;
 (d) $\iiint_D z dV$, onde D é o subconjunto de \mathbb{R}^3 limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

4. Calcule os volumes dos seguintes conjuntos:

- (a) Região de \mathbb{R}^3 limitada pela superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e o plano $z = 1$;
 (b) Região de \mathbb{R}^3 limitada inferiormente pela superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, superiormente pelo plano xy e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 16$;
 (c) Região de \mathbb{R}^3 definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$;
 (d) Região de \mathbb{R}^3 limitada pelo plano $x + y + 6z = 9$ e os planos coordenados;

(e) Região de \mathbb{R}^3 limitado por $x^2 + 2y^2 = 2$, $z = 0$ e $x + y + 2z = 2$.

5. Defina-se centro de massa de um sólido S , cuja densidade é σ , como sendo um ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_S x \sigma \, dx \, dy \, dz}{\iiint_S \sigma \, dx \, dy \, dz}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_S y \sigma \, dx \, dy \, dz}{\iiint_S \sigma \, dx \, dy \, dz}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_S z \sigma \, dx \, dy \, dz}{\iiint_S \sigma \, dx \, dy \, dz}$$

Calcule o volume e o centro de gravidade de uma região limitada pelo cilindro parabólico $z = 4 - x^2$ e pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$, $z = 0$, em que σ é constante.

Capítulo 3

Integrais de linha

3.1 Linhas em \mathbb{R}^n

3.1.1 Primeiras definições

Definição 3.1.18 O conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma **linha** ou **curva** de \mathbb{R}^n se existir um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função vectorial contínua

$$\begin{aligned}\phi: I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow \phi(t)\end{aligned}$$

tal que $\mathcal{C} = \phi(I)$.

Dada uma tal função ϕ , o ponto $X \in \mathcal{C}$ diz-se um **ponto múltiplo** se existirem $t, t' \in I$, distintos, tais que $X = \phi(t) = \phi(t')$.

Se existir apenas um número finito de pontos múltiplos, ϕ diz-se uma **representação paramétrica** de \mathcal{C} , de parâmetro t , e o par (\mathcal{C}, ϕ) diz-se uma **linha paramétrica**. Diremos ainda que \mathcal{C} é uma **linha plana** se $n = 2$.

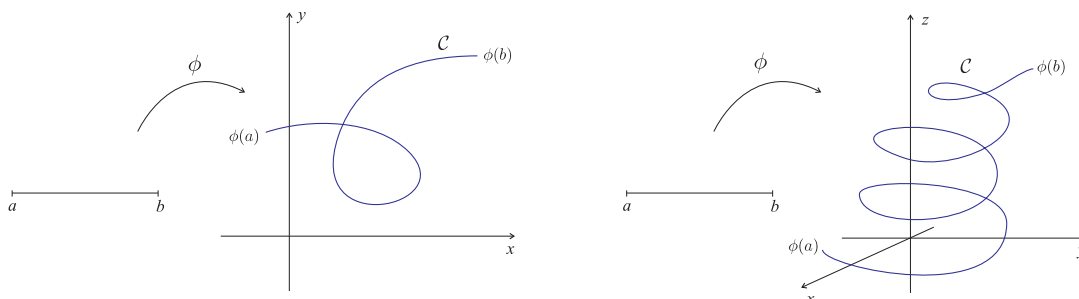


Figura 3.1 Parametrização de uma curva no plano e de uma curva no espaço.

O conceito de linha ou curva que acabamos de introduzir é mais geral do que o de gráfico de uma função. Por exemplo, uma curva pode intersectar-se a si própria, ser fechada (como a

circunferência ou a elipse) ou desenvolver-se em espiral em torno de um ponto (ver Figuras 3.2 e 3.3).

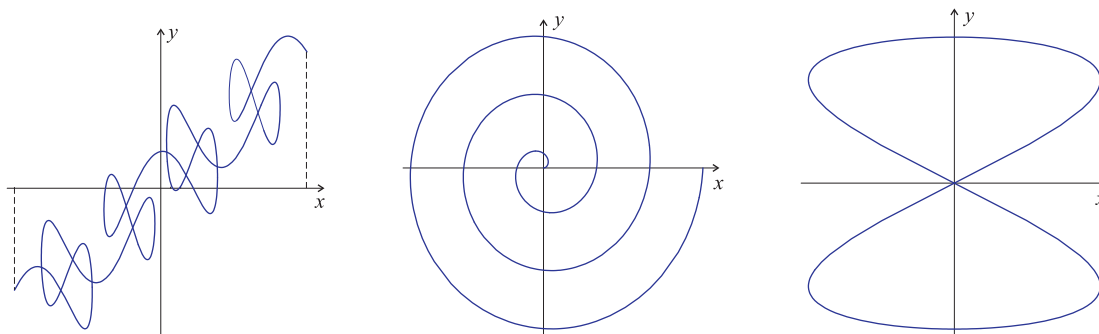


Figura 3.2 Exemplos de curvas no plano.

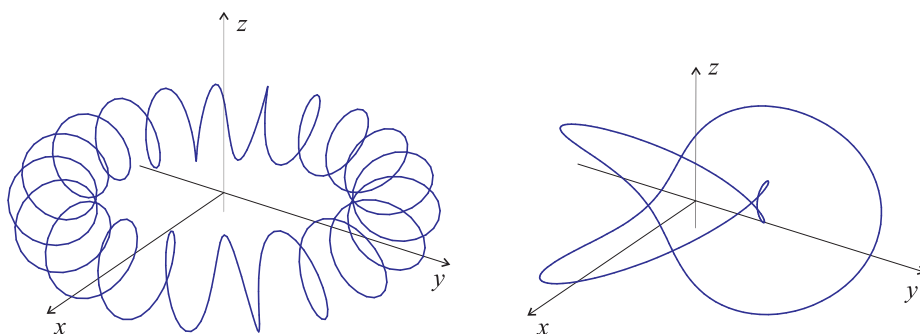


Figura 3.3 Exemplos de curvas no espaço.

EXEMPLO 1: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua de uma variável real (ver Figura 3.4). O gráfico

$$G_f = \{(t, f(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a, b]\}$$

de f é uma linha plana, parametrizada por

$$\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (t, f(t))$$

De notar que uma linha pode não ser o gráfico de uma função, como se pode ver no exemplo seguinte.

EXEMPLO 2: A circunferência \mathcal{C} centrada em $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e de raio r , representada na Figura 3.5,

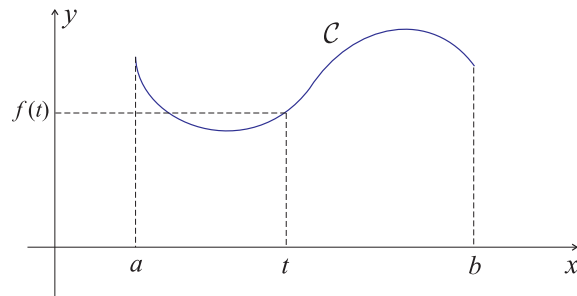


Figura 3.4 O gráfico de uma função f .

é uma linha plana parametrizada por

$$\begin{aligned} \phi : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow (a + r \cos(t), b + r \sin(t)) \end{aligned}$$

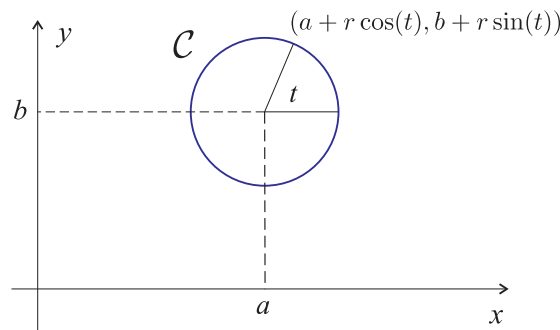


Figura 3.5 Uma parametrização da circunferência de centro (a, b) e raio r .

Note-se que, com a definição dada,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : [0, 4\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow (a + r \cos(t), b + r \sin(t)) \end{aligned}$$

não é uma parametrização de \mathcal{C} , uma vez que todos os pontos de \mathcal{C} são múltiplos.

EXEMPLO 3: Seja $r > 0$. A linha \mathcal{C} parametrizada por

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t))) \end{aligned}$$

diz-se uma **ciclóide** (ver Figura 3.6).

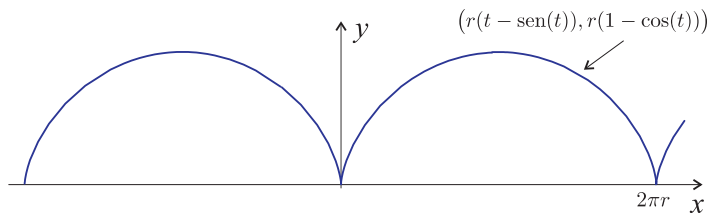


Figura 3.6 A ciclóide.

Uma ciclóide pode ser interpretada como a trajectória de um ponto de uma circunferência que roda sobre um plano, como se pode ver na Figura 3.7.

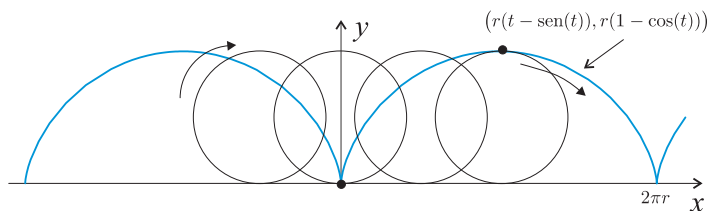


Figura 3.7 A ciclóide.

Definição 3.1.19 Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ uma linha parametrizada pela função contínua

$$\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

(C, ϕ) diz-se uma **linha simples** se a função ϕ é injectiva. Neste caso, os pontos $A = \phi(a)$ e $B = \phi(b)$ dizem-se as extremidades de C (ver Figura 3.8).

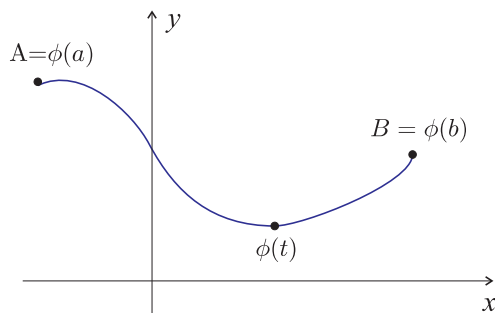


Figura 3.8 Uma linha simples.

Definição 3.1.20 A linha $C \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um **contorno** ou uma **curva fechada** se possuir uma parametrização $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(a) = \phi(b)$.

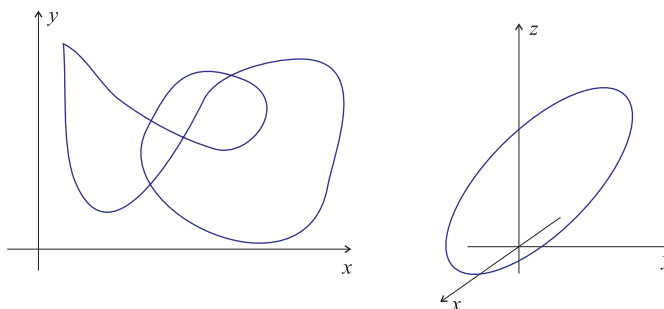


Figura 3.9 Exemplos de curvas fechadas.

Definição 3.1.21 A linha C diz-se uma **curva de Jordan** se existir uma parametrização ϕ de C tal que:

- (i) $\phi|_{[a,b[} : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ é injectiva
- (ii) $\phi(a) = \phi(b)$.

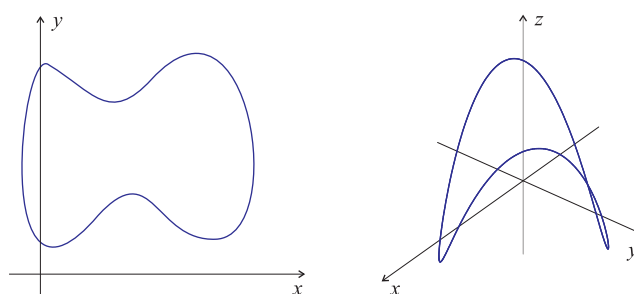


Figura 3.10 Exemplos de curvas de Jordan.

Definição 3.1.22 Uma linha paramétrica (C, ϕ) diz-se de classe C^1 se $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe $C^1([a, b])$. Nesse caso, para $t \in [a, b]$, $\mathbf{v}(t) = \phi'(t)$ diz-se o **vector velocidade** de (C, ϕ) no ponto $\phi(t)$.

Esta nomenclatura vem da cinemática do ponto: se considerarmos um ponto material que se desloca no espaço, e cuja posição é dada, no instante t , por $\phi(t)$, então o seu vector velocidade nesse instante é $\phi'(t)$ (ver Figura 3.11).

EXEMPLO 4: Considerando a cicloide

$$\phi : t \in \mathbb{R} \rightarrow (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t))),$$

temos para todo $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}(t) = (r(1 - \cos(t)), \sin(t))$.

Note-se, em particular, que a velocidade se anula nos instantes $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Isto significa que o ponto de uma roda de uma bicicleta em andamento que se encontra em contacto com a estrada tem velocidade nula: está imóvel!

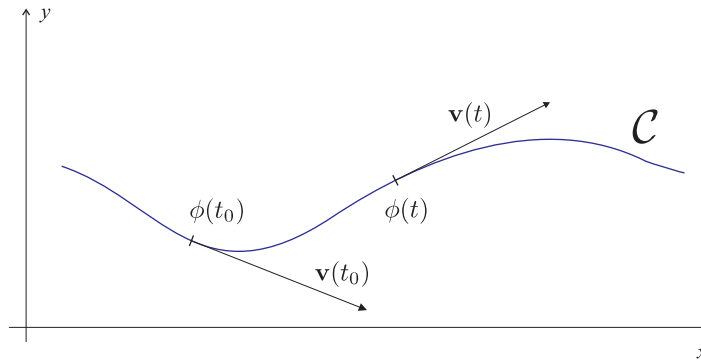


Figura 3.11

Definição 3.1.23 Seja (C, ϕ) uma linha paramétrica de classe C^1 . Um ponto $\phi(t)$ diz-se **estacionário** se $\mathbf{v}(t) = \phi'(t) = 0$. Caso contrário o ponto $\phi(t)$ diz-se **regular**. A linha paramétrica (C, ϕ) diz-se **regular** se para todo t , $\phi(t)$ é regular. A linha paramétrica (C, ϕ) diz-se **seccionalmente regular** se é a união de um número finito de linhas regulares C_1, \dots, C_n , tais que o ponto inicial de C_{i+1} é o ponto terminal de C_i .

É fácil observar que se $\phi(t)$ é um ponto regular de uma linha paramétrica, então a recta $D(t)$ que passa por $\phi(t)$ e de vector director $\mathbf{v}(t)$ é tangente a C em $\phi(t)$.

EXEMPLO 5: Cálculo da equação cartesiana, $D(t)$, da recta tangente à cicloide parametrizada por

$$\phi(t) = (r(t - \text{sen}(t)), r(1 - \text{cos}(t))).$$

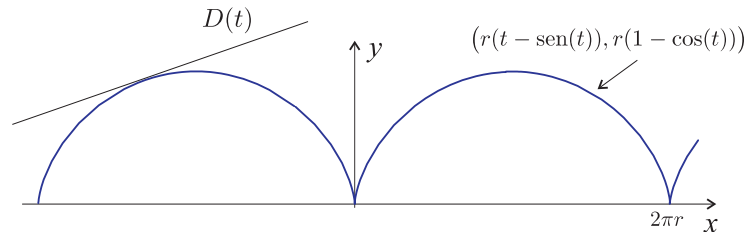


Figura 3.12

Num ponto $M(t)$ regular (isto é $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$): $\mathbf{v}(t) = (r(1 - \text{cos}(t)), r \text{sen}(t))$. Logo,

$$D(t) = \{(M(t) + \lambda \mathbf{v}(t)) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, y) = (r(t - \text{sen}(t)) + \lambda r(1 - \text{cos}(t)), r(1 - \text{cos}(t)) + \lambda r \text{sen}(t)) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Obtém-se pois a equação cartesiana:

$$y = r(1 - \text{cos}(t)) + \frac{\text{sen}(t)}{1 - \text{cos}(t)}(x - r(t - \text{sen}(t))).$$

NOTA: O sentido segundo o qual as equações paramétricas traçam a curva à medida que o parâmetro cresce designa-se por orientação da curva. Notemos que existem duas orientações possíveis para uma linha, consoante as direcções dos vectores velocidade $\mathbf{v}(t)$ (ver Figura 3.13).

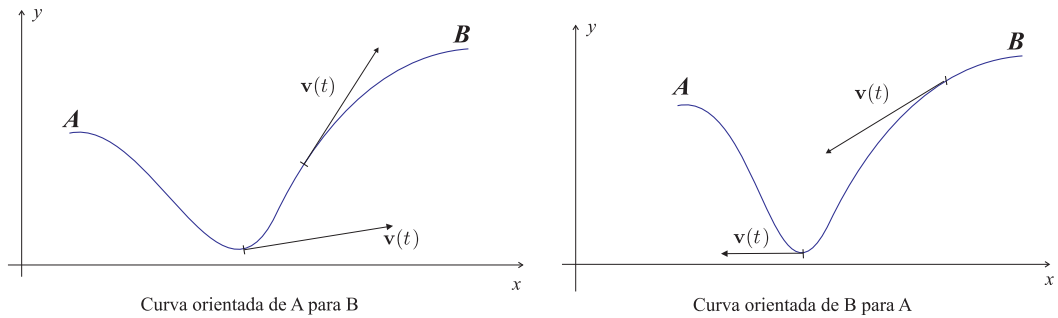


Figura 3.13 Orientação de uma curva.

Por exemplo, para contornos, falaremos, consoante a sua parametrização, em orientação directa (no sentido trigonométrico) ou indirecta (no sentido dos ponteiros do relógio), como está representado na Figura 3.14.

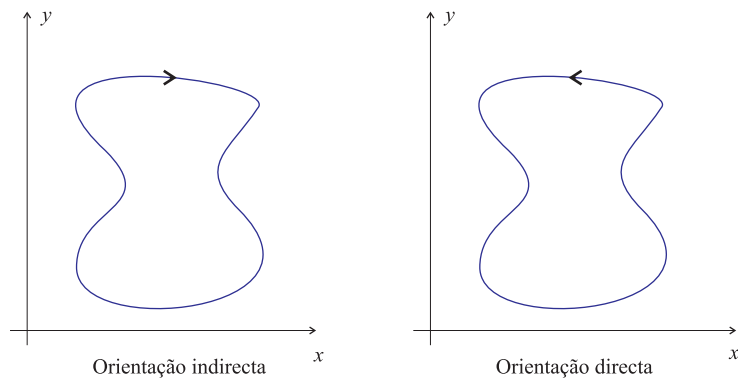


Figura 3.14 Orientação de uma curva fechada.

Podemos de maneira canónica associar a uma parametrização ϕ de uma linha \mathcal{C} uma outra parametrização que inverte a orientação:

Definição 3.1.24 *Seja $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de uma linha \mathcal{C} . À parametrização*

$$\begin{aligned} \phi^* : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \phi(a + b - t) \end{aligned}$$

*chamaremos **parametrização inversa** de ϕ .*

Definição 3.1.25 *Sejam $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, (\mathcal{C}, ϕ) uma linha paramétrica e J um intervalo real. Se*

$\theta : J \rightarrow I$ é um homeomorfismo, então

$$\begin{aligned}\psi : J &\rightarrow I \\ s &\rightarrow \phi \circ \theta(s)\end{aligned}$$

é uma parametrização de \mathcal{C} : diz-se que θ é uma **reparametrização** de \mathcal{C} .

NOTAS:

1. Sendo θ um homeomorfismo de intervalos, θ é estritamente crescente ou decrescente. No primeiro caso, diz-se que θ preserva a orientação, no segundo, diz-se que θ inverte a orientação.
2. Se (\mathcal{C}, ϕ) é uma curva simples, (\mathcal{C}, ψ) é uma curva simples.

Teorema 3.1.8 *Sejam $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, (\mathcal{C}, ϕ) uma linha paramétrica e $M = \phi(t)$ um ponto regular. Seja $\theta : J \rightarrow I$ um difeomorfismo de intervalos e $\psi = \phi \circ \theta$. Então, se $s = \theta^{-1}(t)$, $M = \psi(s)$ é um ponto regular de (\mathcal{C}, ψ) . Consequentemente, se (\mathcal{C}, ϕ) é regular, (\mathcal{C}, ψ) é regular. Se, além disso, θ preserva a orientação, diremos que (\mathcal{C}, ϕ) e (\mathcal{C}, ψ) são **equivalentes**, o que denotaremos por:*

$$(\mathcal{C}, \phi) \sim (\mathcal{C}, \psi).$$

Demonstração: Basta observar que para todo $s \in J$,

$$\psi'(s) = (\phi \circ \theta)'s = \phi'(\theta(s))\theta'(s) = \phi'(t)\theta'(s) \neq 0,$$

já que, por hipótese, $\phi'(t) \neq 0$ e $\theta'(s) \neq 0$ porque θ é um difeomorfismo.

EXEMPLO 6: Consideremos a circunferência \mathcal{C} centrada em (a, b) e de raio r . Vimos que $\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\phi(t) = (a + r \cos(t), b + r \sin(t))$, é uma parametrização de \mathcal{C} . Para todo o t , $\phi'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t)) \neq (0, 0)$, portanto, (\mathcal{C}, ϕ) é uma linha paramétrica regular. Seja $\theta : [1, e^{2\pi}] \rightarrow [0, 2\pi]$, definida por $\theta(s) = \log(s)$. θ é um homeomorfismo crescente pelo que a função

$$\begin{aligned}\psi = \phi \circ \theta : [1, e^{2\pi}] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\rightarrow (a + \cos(\log(s)), b + \sin(\log(s)))\end{aligned}$$

é uma reparametrização de \mathcal{C} .

Notando que ϕ é de classe C^1 e que $\forall t \in [0, 2\pi]$, $\mathbf{v}(t) = \phi'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t)) \neq (0, 0)$, ($\|\mathbf{v}(t)\| = r$), (\mathcal{C}, ϕ) é uma linha paramétrica regular.

Além disso, qualquer que seja $s \in [1, e^{2\pi}]$, $\theta'(s) = \frac{1}{s} > 0$. Assim, θ é um difeomorfismo crescente pelo que

$$(\mathcal{C}, \phi) \sim (\mathcal{C}, \psi).$$

EXEMPLO 7: Seja $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização regular de uma linha \mathcal{C} . Temos $\phi^* = \phi \circ \theta$, onde

$$\theta : [a, b] \rightarrow [a, b]$$

$$t \rightarrow a + b - t$$

é um difeomorfismo decrescente. Verifica-se assim que, de facto, (\mathcal{C}, ϕ) e (\mathcal{C}, ϕ^*) têm orientações opostas (cf Definição 3.1.24).

3.1.2 Comprimento de uma linha - abcissa curvilínea

Lema 1 *Sejam $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e (\mathcal{C}, ϕ) uma linha paramétrica regular. Então, para todo o difeomorfismo $\theta : [c, d] \rightarrow [a, b]$,*

$$\int_a^b \|\phi'(t)\| dt = \int_c^d \|\psi'(s)\| ds,$$

onde $\psi = \phi \circ \theta$.

Demonstração: Começemos por notar que ϕ é uma função vectorial continuamente diferenciável. Assim, $t \rightarrow \|\phi'(t)\|$ é contínua no intervalo $[a, b]$, logo integrável. Como θ é um difeomorfismo de intervalos, fazendo a mudança de variável $t = \theta(s)$, obtém-se

$$\int_a^b \|\phi'(t)\| dt = \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} \|\phi'(\theta(s))\| \theta'(s) ds.$$

- Se θ é um difeomorfismo crescente, $\theta(c) = a$, $\theta(d) = b$ e $\theta'(s) > 0$ para todo s . Assim,

$$\int_a^b \|\phi'(t)\| dt = \int_c^d \|\phi'(\theta(s))\| \theta'(s) ds = \int_c^d \|(\phi \circ \theta)'(s)\| ds = \int_c^d \|\psi'(s)\| ds.$$

- Se θ é um difeomorfismo decrescente, $\theta(c) = b$, $\theta(d) = a$ e $\theta'(s) < 0$ para todo s , pelo que

$$\int_a^b \|\phi'(t)\| dt = - \int_d^c \|\phi'(\theta(s))\| (-\theta'(s)) ds = - \int_d^c \|-(\theta'(s)) \phi'(\theta(s))\| ds = \int_c^d \|\psi'(s)\| ds.$$

Este lema permite dar a seguinte definição de comprimento de uma linha:

Definição 3.1.26 *Seja \mathcal{C} uma linha de \mathbb{R}^n e $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma qualquer parametrização de \mathcal{C} tal que (\mathcal{C}, ϕ) é regular. Define-se o **comprimento de \mathcal{C}** por*

$$l(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\mathbf{v}(t)\| dt,$$

onde $\mathbf{v} = \phi'$.

Damos aqui uma explicação intuitiva desta fórmula: por comodidade, vamos tomar uma curva plana parametrizada por $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (t, f(t))$, onde f é uma função continuamente diferenciável.

Considere-se a partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$ com

$$x_j = a + j \frac{b-a}{n}.$$

Seja $S_j(n) = [\phi(x_j), \phi(x_{j+1})]$ o segmento de extremidades $A_j(n) = \phi(x_j)$ e $A_{j+1}(n) = \phi(x_{j+1})$. “Faz sentido” considerar que

$$l(\mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{A_j(n)A_{j+1}(n)}.$$

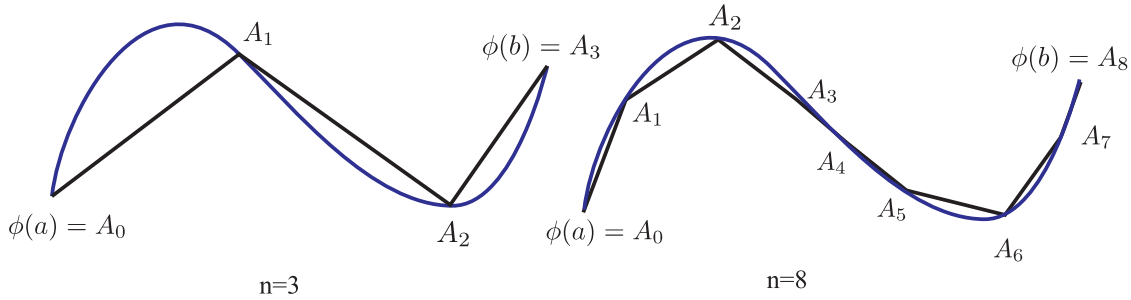


Figura 3.15

Por outro lado,

$$\overline{A_j(n)A_{j+1}(n)} = \|\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)\| = \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (f(x_{j+1}) - f(x_j))^2},$$

pelo que

$$l(\mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (f(x_{j+1}) - f(x_j))^2}.$$

Como f é uma função continuamente diferenciável, sabemos pelo Teorema de Lagrange que

$$\exists c_j \in]x_j, x_{j+1}[, \quad f'(c_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}.$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \overline{A_j(n)A_{j+1}(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) \sqrt{1 + f'(c_j)^2} = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) \|\phi'(c_j)\|.$$

Assim,

$$s_n = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) \min_{t \in [x_j, x_{j+1}]} \|\phi'(t)\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \overline{A_j(n)A_{j+1}(n)} \leq \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) \max_{t \in [x_j, x_{j+1}]} \|\phi'(t)\| = S_n.$$

Como já foi referido, a função $\|\phi'(t)\|$ é contínua, logo integrável no segmento $[a, b]$. Por construção do integral de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt.$$

Pelo teorema das sucessões enquadradas,

$$l(\mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{A_j(n)A_{j+1}(n)} = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt.$$

EXEMPLO 1: Calculemos o comprimento da linha em \mathbb{R}^4 definida por

$$\phi(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t)), \quad t \in [0, \pi].$$

$$\begin{aligned} l(\mathcal{C}) &= \int_0^\pi \|\mathbf{v}(t)\| dt = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (-2\sin(2t))^2 + (4\cos(2t))^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{17} dt = \pi\sqrt{17}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2: Calculemos o comprimento da curva \mathcal{C} que é o gráfico da função $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Tratando-se do gráfico de uma função, temos a seguinte parametrização natural:

$$\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (t, f(t)).$$

Para todo t , $\mathbf{v}(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0)$, pelo que ϕ é uma parametrização regular. Assim,

$$l(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\mathbf{v}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

EXEMPLO 3: Calculemos o comprimento da curva \mathcal{C} que é o gráfico da função $f(x) = \log(x) - \frac{1}{8}x^2$ no intervalo $[1, 2]$. Tratando-se do gráfico de uma função, temos a seguinte parametrização natural:

$$\phi : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (t, \log(t) - \frac{1}{8}t^2).$$

Para todo t , $\mathbf{v}(t) = (1, \frac{1}{t} - \frac{1}{4}t) \neq (0, 0)$, pelo que ϕ é uma parametrização regular. Assim,

$$l(\mathcal{C}) = \int_1^2 \|\mathbf{v}(t)\| dt = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{4}\right)^2} dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} + \frac{t}{4}\right) dt = \log(2) + \frac{3}{8}.$$

EXEMPLO 4: Calculemos o comprimento da porção de parábola

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, x \in [0, r]\}$$

Tratando-se do gráfico de uma função, temos a seguinte parametrização natural:

$$\phi : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (t, t^2).$$

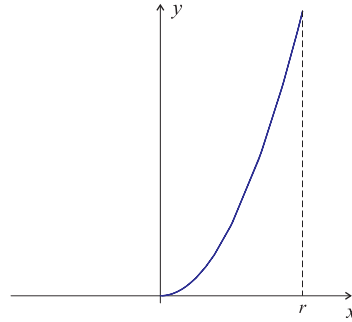


Figura 3.16

Para todo t , $\mathbf{v}(t) = (1, 2t) \neq (0, 0)$, pelo que (\mathcal{C}, ϕ) é uma parametrização regular. Assim,

$$\begin{aligned} l(\mathcal{C}) &= \int_0^r \|\mathbf{v}(t)\| dt = \int_0^r \sqrt{1 + 4t^2} dt = \int_0^r 2\sqrt{\frac{1}{4} + t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{4}\log(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}). \end{aligned}$$

EXEMPLO 5: Perímetro da elipse de equação

$$\mathcal{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}.$$

Introduzimos t tal que $\frac{x}{a} = \cos(t)$ e $\frac{y}{b} = \sin(t)$, e obtemos assim a seguinte parametrização da elipse:

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (a \cos(t), b \sin(t)).$$

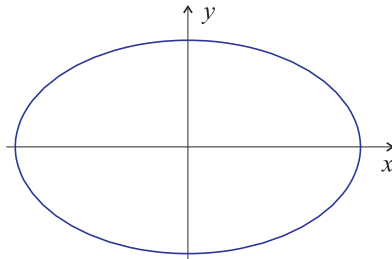


Figura 3.17

Para todo t , $\mathbf{v}(t) = (-a \sin(t), b \cos(t)) \neq (0, 0)$, portanto, (\mathcal{L}, ϕ) é regular.

$$l(\mathcal{L}) = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{v}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt.$$

Não é possível exprimir uma primitiva da função a integrar utilizando funções elementares, pelo que não podemos dar um resultado exacto do perímetro da elipse. Note-se, no entanto, que se $a = b$, obtém-se uma circunferência de raio a , e

$$l(\mathcal{L}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} a dt = 2\pi a.$$

EXEMPLO 6: Comprimento da porção de hélice

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z) = (r \cos(t), r \sin(t), at) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t \leq R\},$$

onde a é uma constante positiva.

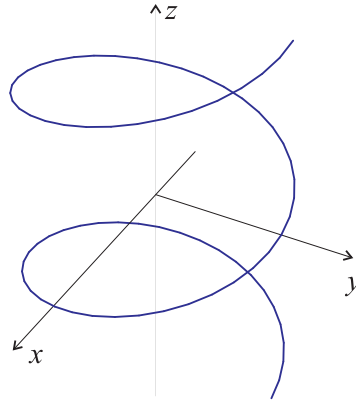


Figura 3.18

Temos a seguinte parametrização:

$$\phi : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(t) = (r \cos(t), r \sin(t), at).$$

$$\mathbf{v}(t) = (-r \sin(t), r \cos(t), a) \quad \text{e} \quad \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{r^2 + a^2},$$

portanto,

$$l(\mathcal{H}) = \int_0^R \sqrt{r^2 + a^2} dt = R\sqrt{r^2 + a^2}.$$

Vejamos como calcular o comprimento de uma linha em coordenadas polares.

Seja $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, uma função definida em coordenadas polares. Consideremos a seguinte parametrização de $r = f(\theta)$:

$$x = f(\theta) \cos(\theta), \quad y = f(\theta) \sin(\theta),$$

$\alpha \leq \theta \leq \beta$. Se f' é contínua no intervalo $[\alpha, \beta]$, então

$$\begin{aligned} l &= \int_{\alpha}^{\beta} \|\phi'(\theta)\| d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \|(f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta), f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta))\| d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta))^2 + (f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta))^2} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} d\theta. \end{aligned}$$

Também podemos escrever

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta.$$

EXEMPLO 7: O perímetro da circunferência $r = 5$ calcula-se facilmente:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{25} d\theta = 10\pi.$$

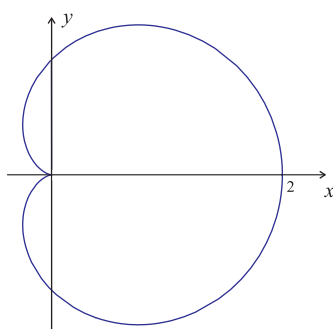


Figura 3.19 A cardióide.

EXEMPLO 8: Calculemos o comprimento da cardióide de equação $r = 1 + \cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Pela simetria da curva em relação ao eixo polar temos

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos(\theta))^2 + (-\text{sen}(\theta))^2} d\theta = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos(\theta)} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta = 4 \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 8 \end{aligned}$$

EXEMPLO 9: Calculemos o perímetro do triângulo de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$. A linha \mathcal{C} é constituída por três segmentos, que vamos designar por \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_3 , e que admitem as parametrizações $(1 - t, t)$, $(-t, 1 - t)$, $(2t, 0)$, $t \in [0, 1]$, respectivamente.

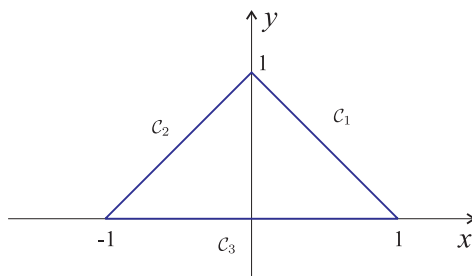


Figura 3.20 Uma curva constituída por três segmentos.

$$\begin{aligned} l(\mathcal{C}) &= l(\mathcal{C}_1) + l(\mathcal{C}_2) + l(\mathcal{C}_3) = \int_0^1 \|(-1, 1)\| dt + \int_0^1 \|(-1, -1)\| dt + \int_0^1 \|(2, 0)\| dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{2} dt + \int_0^1 \sqrt{2} dt + \int_0^1 2 dt = 2(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

Lema 2 *Seja (\mathcal{C}, ϕ) uma linha regular, $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Seja l o comprimento de \mathcal{C} . Então a função*

$$\theta : [a, b] \rightarrow [0, l], \quad \theta(t) = \int_a^t \|\phi'(x)\| dx$$

é um difeomorfismo.

Demonstração: Temos $\theta(a) = 0$ e $\theta(b) = l$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral, θ é diferenciável e $\theta'(t) = \|\phi'(t)\| > 0$.

Definição 3.1.27 *Seja (\mathcal{C}, ϕ) uma linha regular, $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. A aplicação $\sigma(s) = \phi \circ \theta^{-1}(s)$ é uma reparametrização de \mathcal{C} . Diz-se que a curva paramétrica (\mathcal{C}, σ) é parametrizada pela “**abscissa curvilínea**” ou pelo “**comprimento de arco**”.*

NOTA: A parametrização σ não depende da escolha inicial de ϕ , apenas da orientação de (\mathcal{C}, ϕ) . Assim, uma linha regular admite duas abscissas curvilíneas, uma para cada sentido de percurso.

EXEMPLO 9: Parametrizemos pelo comprimento de arco, medido desde o ponto $(1, 0, 0)$ na direcção de crescimento de t , a hélice definida por $\phi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.

Dado que $\phi(0) = (1, 0, 0)$, temos

$$s = \theta(t) = \int_0^t \|\phi'(t)\| dt = \int_0^t \sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos^2(t) + 1} dt = \int_0^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t.$$

$$\text{Então } \theta^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{2}} \text{ e } \sigma(s) = \phi(\theta^{-1}(s)) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right).$$

O principal interesse desta noção é o seguinte:

Proposição 12 *Seja (\mathcal{C}, σ) uma linha paramétrica, parametrizada pela abscissa curvilínea. Então para todo $s \in [0, l]$, $\|\sigma'(s)\| = 1$. Por outras palavras, esta parametrização corresponde a um percurso da curva \mathcal{C} com velocidade unitária.*

Demonstração: Seja $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma = \phi \circ \theta^{-1}$, onde $\theta(t) = \int_0^t \|\phi'(x)\| dx$. Então, pela fórmula da derivada da função inversa,

$$\sigma'(s) = \phi'(\theta^{-1}(s)) (\theta^{-1})'(s) = \frac{1}{\theta'(\theta^{-1}(s))} \phi'(\theta^{-1}(s)).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral, $\theta'(t) = \|\phi'(t)\|$, logo

$$\sigma'(s) = \frac{1}{\|\phi'(\theta^{-1}(s))\|} \phi'(\theta^{-1}(s)),$$

o que implica $\|\sigma'(s)\| = 1$.

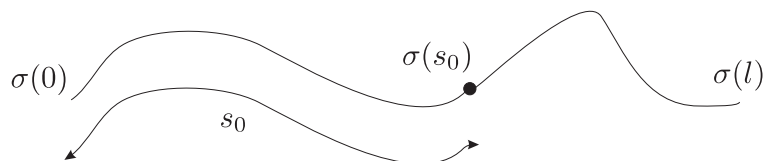


Figura 3.21

Corolário 1 Seja (\mathcal{C}, σ) uma curva parametrizada pela abscissa curvilínea. Seja $\mathcal{C}_{s_0} = \sigma[0, s_0]$ o troço de \mathcal{C} delimitado pelos pontos $\sigma(0)$ e $\sigma(s_0)$. Então

$$l(\mathcal{C}_{s_0}) = s_0.$$

Demonstração: Basta observar que

$$l(\mathcal{C}_{s_0}) = \int_0^{s_0} \|\sigma'(s)\| ds = \int_0^{s_0} ds = s_0.$$

3.2 Integral Curvilíneo

3.2.1 Definição

Trata-se neste capítulo de integrar uma função “ao longo” de uma linha. Daremos mais adiante uma interpretação geométrica desta noção.

Seja $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização regular de uma linha \mathcal{C} e $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, com $\mathcal{C} \subset D$.

Seja $P = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = b.$$

Denotemos por Δs_k o comprimento do troço de \mathcal{C} delimitado por $\phi(t_k)$ e $\phi(t_{k+1})$:

$$\Delta s_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\phi'(t)\| dt.$$

Definimos as somas de Darboux (superior e inferior por):

$$S_P = \sum_{k=0}^{N-1} \sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} f(\phi(t)) \Delta s_k \quad \text{e} \quad s_P = \sum_{k=0}^{N-1} \inf_{t \in [t_k, t_{k+1}]} f(\phi(t)) \Delta s_k.$$

Finalmente, seja \mathcal{P} o conjunto de todas as partições P do intervalo $[a, b]$.

Definição 3.2.28 *Com as notações anteriores, se*

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} S_P = \sup_{P \in \mathcal{P}} s_P,$$

dizemos que f é integrável ao longo de \mathcal{C} , e denotamos

$$\int_{(\mathcal{C}, \phi)} f ds = \inf_{P \in \mathcal{P}} S_P = \sup_{P \in \mathcal{P}} s_P$$

o integral curvilíneo de f ao longo de \mathcal{C} .

Teorema 3.2.9 *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, com $\mathcal{C} \subset D$. Se f é contínua em \mathcal{C} então f é integrável ao longo de \mathcal{C} .*

Vejamos uma interpretação geométrica desta noção: seja $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização regular da linha plana \mathcal{C} e f uma função positiva, integrável ao longo de \mathcal{C} . Então $\int_{(\mathcal{C}, \phi)} f ds$ representa a área da superfície delimitada por:

- recta que une o ponto $(x, y) = \phi(a)$ ao ponto $(x, y, f(x, y))$;
- recta que une o ponto $(x, y) = \phi(b)$ ao ponto $(x, y, f(x, y))$;
- linha \mathcal{C} ;
- gráfico de f .

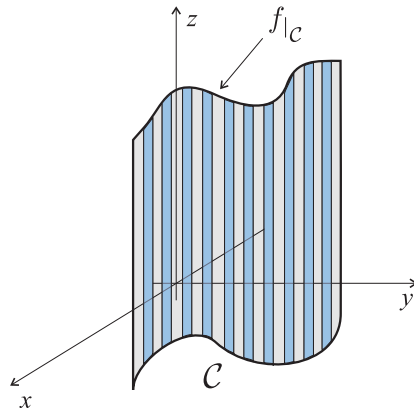


Figura 3.22 Interpretação geométrica de $\int_{(C,\phi)} f ds$.

Já conhecíamos estes resultados no caso em que C é um segmento de recta: trata-se do integral definido.

A seguinte propriedade permite, na prática, calcular integrais curvilíneos:

Proposição 13 *Seja $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização regular de uma linha C . Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável ao longo de C . Então*

$$\int_{(C,\phi)} f ds = \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt.$$

Demonstração: Consideremos a partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_N = b\}$ de $[a, b]$. Temos

$$S_P = \sum_{k=0}^{N-1} \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} f(\phi(t)) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\phi'(t)\| dt \geq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt = \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt$$

pelas propriedades conhecidas dos integrais definidos. Da mesma forma,

$$s_P = \sum_{k=0}^{N-1} \min_{t \in [t_k, t_{k+1}]} f(\phi(t)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\phi'(t)\| dt \leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt = \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt.$$

Assim,

$$s_P \leq \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt \leq S_P.$$

Passando ao ínfimo na desigualdade da direita e ao supremo na da esquerda, obtemos

$$\int_{(C,\phi)} f ds = \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt.$$

Proposição 14 *O integral curvilíneo $\int_{(C,\phi)} f ds$ não depende da parametrização ϕ da linha C .*

Demonstração: Sejam $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de \mathcal{C} , $\theta : [c, d] \rightarrow [a, b]$ um difeomorfismo de intervalos e $\psi = \phi \circ \theta$. Pela mudança de variável $t = \theta(s)$, temos

$$\int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt = \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} f(\phi(\theta(s))) \|\phi'(\theta(s))\| \theta'(s) ds.$$

- Se θ é crescente, $\theta(c) = a$, $\theta(d) = b$ e $\theta'(s) > 0$ para todo s . Assim,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt &= \int_c^d f(\phi(\theta(s))) \|\phi'(\theta(s))\| \theta'(s) ds \\ &= \int_c^d f(\psi(s)) \|(\phi \circ \theta)'(s)\| ds = \int_c^d f(\psi(s)) \|\psi'(s)\| ds. \end{aligned}$$

- Se θ é um difeomorfismo decrescente, $\theta(c) = b$, $\theta(d) = a$ e $\theta'(s) < 0$ para todo s , pelo que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt &= - \int_d^c f(\phi(\theta(s))) \|\phi'(\theta(s))\| (-\theta'(s)) ds \\ &= - \int_d^c f(\psi(s)) \|-\phi'(\theta(s))\| \theta'(s) ds = \int_c^d f(\psi(s)) \|\psi'(s)\| ds. \end{aligned}$$

NOTAS:

1. A proposição anterior permite-nos escrever a seguinte igualdade, independentemente da parametrização ϕ ,

$$\int_{(\mathcal{C}, \phi)} f ds = \int_{\mathcal{C}} f ds.$$

2. Se \mathcal{C} é parametrizada pela abcissa curvilínea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f(\sigma(s)) \|\sigma'(s)\| ds = \int_a^b f(\sigma(s)) ds,$$

o que justifica a notação "ds".

3. O integral curvilíneo que define o comprimento de uma linha é o integral curvilíneo da função constante igual a 1.

EXEMPLO 1: As parametrizações

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

$$\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

$$\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \eta(t) = (\cos(2\pi t^2), \sin(2\pi t^2))$$

verificam $\phi([0, 2\pi]) = \psi([0, 1]) = \eta([0, 1]) = \mathcal{C}$, onde \mathcal{C} é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1. Seja $f(x, y) = x^2 + 3xy$. Então

$$\begin{aligned}
\int_{(\mathcal{C}, \phi)} f \, ds &= \int_0^{2\pi} f(\cos(t), \sin(t)) \|(-\sin(t), \cos(t))\| \, dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + 3 \cos(t) \sin(t)) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} + 3 \cos(t) \sin(t) \right) \, dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{3}{2} \sin^2(t) \right]_0^{2\pi} = \pi \\
\int_{(\mathcal{C}, \psi)} f \, ds &= \int_0^1 f(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \|(-2\pi \sin(t), 2\pi \cos(t))\| \, dt \\
&= \int_0^1 (\cos^2(2\pi t) + 3 \cos(2\pi t) \sin(2\pi t)) 2\pi \, dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1 + \cos(4\pi t)}{2} + 3 \cos(2\pi t) \sin(2\pi t) \right) 2\pi \, dt \\
&= 2\pi \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(4\pi t)}{8\pi} + \frac{3}{2\pi} \sin^2(2\pi t) \right]_0^1 = \pi \\
\int_{(\mathcal{C}, \eta)} f \, ds &= \int_0^1 f(\cos(2\pi t^2), \sin(2\pi t^2)) \|(-4\pi t \sin(2\pi t^2), 4\pi t \cos(2\pi t^2))\| \, dt \\
&= \int_0^1 (\cos^2(2\pi t^2) + 3 \cos(2\pi t^2) \sin(2\pi t^2)) 4\pi t \, dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1 + \cos(4\pi t^2)}{2} + 3 \cos(2\pi t^2) \sin(2\pi t^2) \right) 4\pi t \, dt \\
&= 4\pi \left[\frac{t^2}{4} + \frac{\sin(4\pi t^2)}{16\pi} + \frac{3}{4\pi} \sin^2(2\pi t^2) \right]_0^1 = \pi
\end{aligned}$$

EXEMPLO 2: Seja \mathcal{C} a circunferência centrada na origem e de raio 1, orientada no sentido directo. Seja $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Vamos calcular $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$. Começamos por escolher uma parametrização de \mathcal{C} que a oriente no sentido directo:

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Temos

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_0^{2\pi} f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \cdot \|(-\sin(t), \cos(t))\| \, dt = \int_0^{2\pi} \cos(t) \, dt = 0.$$

EXEMPLO 3: Calculemos a área da superfície delimitada inferiormente pela semicircunferência $y = \sqrt{9 - x^2}$ e superiormente pela superfície $z = x^2 y$. Consideremos a seguinte parametrização da semicircunferência:

$$\phi(t) = (3 \cos(t), 3 \sin(t)), \quad t \in [0, \pi].$$

A área é o valor do integral

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_C x^2 y ds = \int_0^\pi 27 \cos^2(t) \sin(t) \cdot \|(-3 \sin(t), 3 \cos(t))\| dt \\ &= \int_0^\pi 81 \cos^2(t) \sin(t) dt = 27 [-\cos^3(t)]_0^\pi = 54. \end{aligned}$$

3.2.2 Campos vectoriais

Definição 3.2.29 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Uma função*

$$\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*diz-se um **campo vectorial** sobre Ω . Se $n = 2$, \mathbf{F} diz-se um **campo vectorial no plano**. Se $n = 3$, \mathbf{F} diz-se um **campo vectorial no espaço**.*

Essencialmente, um campo vectorial associa um vector a cada ponto de Ω (ver as Figuras 3.23 e 3.24).

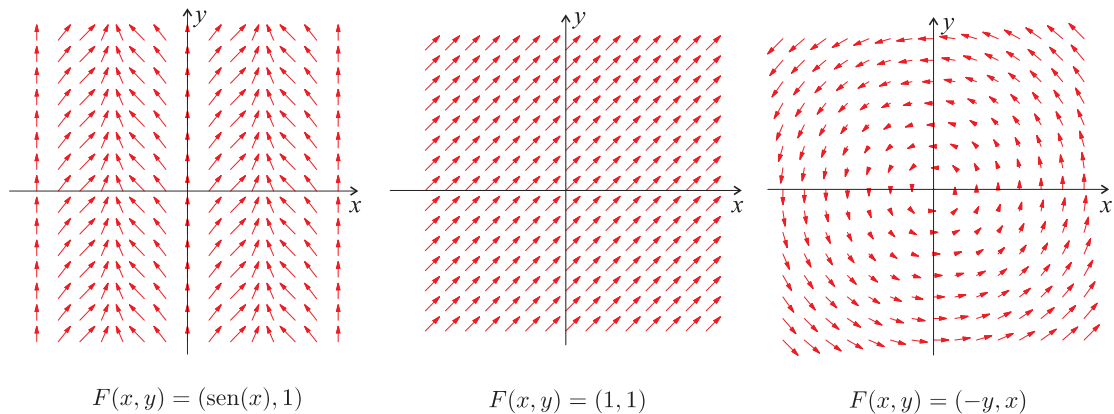


Figura 3.23 Exemplos de campos vectoriais no plano.

Seja $\mathcal{V}(\Omega)$ o conjunto de todos os campos de vectores. Claramente, $\mathcal{V}(\Omega)$ é um espaço vectorial real para as operações naturais:

- $\forall \mathbf{F} \in \mathcal{V}(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda \cdot \mathbf{F}) : X \in \Omega \rightarrow \lambda \mathbf{F}(X)$
- $\forall \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{V}(\Omega), (\mathbf{F} + \mathbf{G}) : X \in \Omega \rightarrow \mathbf{F}(X) + \mathbf{G}(X)$

Denotaremos daqui em diante $\mathcal{V}_p(\Omega)$ o espaço dos campos vectoriais sobre Ω de classe $C^p(\Omega)$.

Definição 3.2.30 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e $\mathbf{F} \in \mathcal{V}_1(\Omega)$. Define-se **divergência** de \mathbf{F} como sendo a função*

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{F}) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x}(X) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(X) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(X) \end{aligned}$$

onde, para todo $X \in \Omega$, $\mathbf{F}(X) = (F_1(X), F_2(X), F_3(X))$.

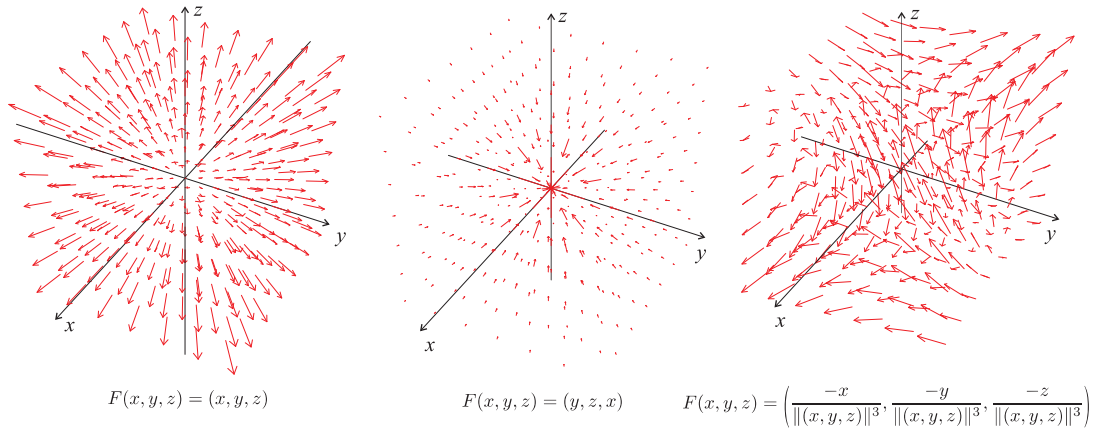


Figura 3.24 Exemplos de campos vectoriais no espaço.

Definição 3.2.31 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e $\mathbf{F} \in \mathcal{V}_1(\Omega)$. Define-se **rotacional** de \mathbf{F} como sendo o campo vectorial:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{F}) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\rightarrow \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}(X) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(X), \frac{\partial F_1}{\partial z}(X) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(X), \frac{\partial F_2}{\partial x}(X) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(X) \right), \end{aligned}$$

onde, para todo $X \in \Omega$, $\mathbf{F}(X) = (F_1(X), F_2(X), F_3(X))$.

De notar que $\text{rot}(\mathbf{F}) \in \mathcal{V}_o(\Omega)$ (campo vectorial contínuo), enquanto que $\text{div}(\mathbf{F})$ é uma função com valores reais.

NOTA: Vector ∇ (nabla)

Definindo formalmente o operador

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

podemos interpretar a divergência e o rotacional de um campo vectorial \mathbf{F} do seguinte modo:

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (\text{"produto interno"})$$

e

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (\text{"produto externo"}),$$

onde este determinante é simbólico e $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Note-se que se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos ainda interpretar o gradiente de f por:

$$\text{grad}(f) = \nabla f,$$

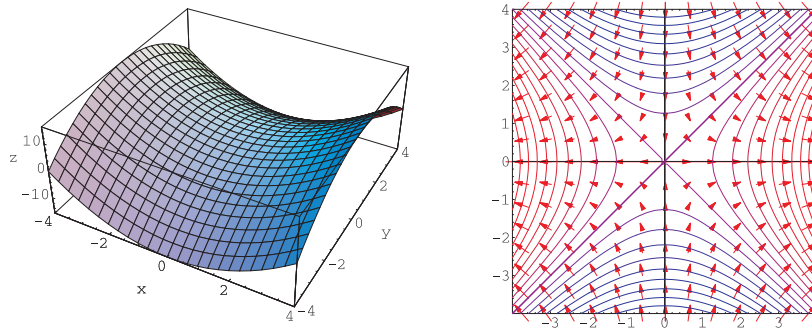


Figura 3.25 O gradiente de $f(x, y) = x^2 - y^2$ é um campo vectorial.

isto é, o gradiente de f é um campo vectorial. Na Figura 3.25 pode ver-se o campo vectorial da função $f(x, y) = x^2 - y^2$ juntamente com as curvas de nível de f . Observe-se que os vectores do gradiente são mais compridos onde as curvas de nível são menos espaçadas.

EXEMPLO 1: Consideremos o campo vectorial definido por $F(x, y, z) = (e^{xy}, e^{xy}, e^{xz})$. A divergência de \mathbf{F} é

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) = ye^{xy} + xe^{xy} + xe^{xz}.$$

EXEMPLO 2: Consideremos o campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, xyz, x + y + z)$. O rotacional de \mathbf{F} é

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z), \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) \right) \\ &= (1 - xy, 2z - 1, yz - 2y). \end{aligned}$$

Definição 3.2.32 Seja $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) \in \mathcal{V}_1(\Omega)$ um campo vectorial, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad \forall i \neq j,$$

diz-se que \mathbf{F} é um **campo vectorial fechado**.

3.2.3 Integração de um campo vectorial

Definição 3.2.33 Seja $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização regular de uma linha \mathcal{C} . Seja $\mathbf{F} \in \mathcal{V}_1(\Omega)$ com $\mathcal{C} \subset \Omega$. Definimos o integral de \mathbf{F} ao longo de \mathcal{C} por:

$$\int_{(\mathcal{C}, \phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \mathbf{v}(t) dt$$

onde $\mathbf{v} = \phi'$.

Outro modo de calcular este integral é o seguinte: seja $\mathbf{T}(t) = \frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|}$ o vector tangente unitário. Então

$$\int_{(C,\phi)} \mathbf{F} \cdot ds = \int_a^b \left(\mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|} \right) \|\phi'(t)\| dt = \int_a^b (\mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \mathbf{T}(t)) \|\phi'(t)\| dt.$$

Esta noção corresponde ao trabalho de uma força: consideremos um ponto material (cuja posição é dada, no instante t , por $\phi(t)$) submetido no instante t a uma força \mathbf{F} . O trabalho de \mathbf{F} entre os instantes a e b é dado por

$$\int_{(C,\phi)} \mathbf{F} \cdot ds.$$

EXEMPLO 1: Consideremos o quarto de circunferência parametrizada por $\phi : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (\cos(t), \sin(t))$, e $\mathbf{F} \in \mathcal{V}(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, definido por:

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Temos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \mathbf{v}(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} (-\sin(t)) - \frac{\sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} (\cos(t)) \right) dt \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(t) \sin(t) dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt = \frac{1}{2} [\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1. \end{aligned}$$

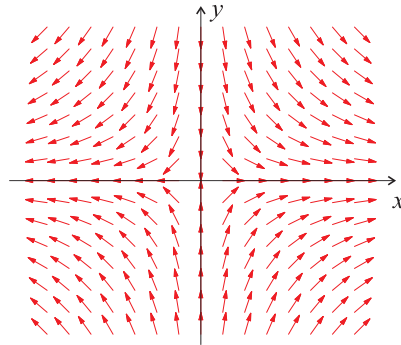


Figura 3.26 O campo vectorial $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$.

Contrariamente aos integrais de linha, a integração de um campo vectorial ao longo de uma linha C não é independente da parametrização ϕ :

Proposição 15 *Sejam $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização regular de uma linha C e $\mathbf{F} \in \mathcal{V}_1(\Omega)$, $C \subset \Omega$. Seja $\theta : [c, d] \rightarrow [a, b]$ um difeomorfismo de intervalos e $\psi = \phi \circ \theta$. Então*

(i) *Se θ preserva a orientação (θ crescente),*

$$\int_{(C,\phi)} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{(C,\psi)} \mathbf{F} \cdot ds.$$

(ii) Se θ inverte a orientação (θ decrescente),

$$\int_{(C,\phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{(C,\psi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Demonstração: Consideremos a mudança de variável $t = \theta(s)$:

(i) Se θ é crescente, $\theta(c) = a$, $\theta(d) = b$:

$$\begin{aligned} \int_{(C,\phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \mathbf{v}(t) dt = \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} \mathbf{F}(\phi(\theta(s))) \cdot \phi'(\theta(s)) \theta'(s) ds \\ &= \int_c^d \mathbf{F}(\psi(s)) \cdot \psi'(s) ds = \int_{(C,\psi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

(ii) Se θ é um difeomorfismo decrescente, $\theta(c) = b$, $\theta(d) = a$:

$$\begin{aligned} \int_{(C,\phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \mathbf{v}(t) dt = \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} \mathbf{F}(\phi(\theta(s))) \cdot \phi'(\theta(s)) \theta'(s) ds \\ &= \int_d^c \mathbf{F}(\psi(s)) \cdot \psi'(s) ds = - \int_{(C,\psi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Se não houver ambiguidade quanto à orientação notaremos apenas

$$\int_{(C,\phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Se C for um contorno ($\phi(a) = \phi(b)$), denotaremos $\int_{(C,\phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ por

$$\oint_{C_+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{ou} \quad \oint_{C_-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

consoante C é percorrido no sentido directo ou indirecto.

Temos claramente que

$$\int_{(C,\phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{(C,\phi^*)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

EXEMPLO 2: Seja C a circunferência parametrizada por $\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (\cos(t), \sin(t))$, e $\mathbf{F} \in \mathcal{V}(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definido por:

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Temos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \mathbf{v}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} (-\sin(t)) + \frac{\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} (\cos(t)) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

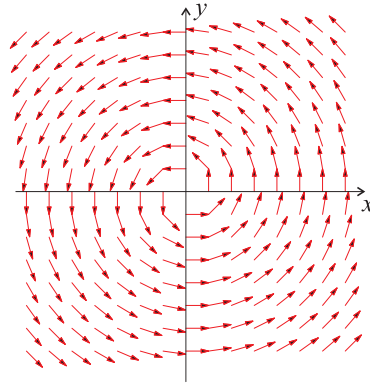


Figura 3.27 O campo vectorial $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$.

Consideremos a parametrização $\psi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (\text{sen}(t), \text{cos}(t))$. Esta parametrização inverte a orientação de \mathcal{C} e

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \mathbf{v}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\text{cos}(t)}{\text{cos}^2(t) + \text{sen}^2(t)} (\text{cos}(t)) + \frac{\text{sen}(t)}{\text{cos}^2(t) + \text{sen}^2(t)} (-\text{sen}(t)) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\text{sen}^2(t) - \text{cos}^2(t)) dt = - \int_0^{2\pi} 1 dt = -2\pi. \end{aligned}$$

3.2.4 Campos de gradientes

Definição 3.2.34 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O campo vectorial $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se um **campo de gradientes** ou um **campo conservativo** se existir uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$\forall X \in \Omega, \quad \mathbf{F}(X) = \nabla f(X).$$

A função f chama-se **potencial** do campo vectorial.

Para $n = 2$, os campos de gradientes são os campos da forma

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right), \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

e, para $n = 3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right), \quad \forall (x, y, z) \in \Omega.$$

Em física, considerando \mathbf{F} um campo de forças, fala-se em “força conservativa” ou “força que deriva de um potencial”.

EXEMPLO 1: Consideremos o campo vectorial \mathbf{F} definido por $F(x, y) = (2xy, x^2 - y)$. Verifiquemos que é um campo de gradientes. Se existir $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y.$$

Da primeira igualdade, integrando em ordem a x , deduzimos $f(x, y) = x^2y + h(y)$, para alguma função h , e da segunda, integrando em ordem a y , $f(x, y) = x^2y - \frac{y^2}{2} + g(x)$. Comparando as duas expressões, concluímos que $f(x, y) = x^2y - \frac{y^2}{2}$ é o potencial do campo vectorial dado.

EXEMPLO 2: Seja \mathbf{F} o campo vectorial $F(x, y) = (\cos(y) + y \cos(x), \sin(x) - x \sin(y))$. Verifiquemos que é um campo de gradientes. Se existir $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y) + y \cos(x), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x) - x \sin(y).$$

Da primeira igualdade, integrando em ordem a x , deduzimos $f(x, y) = x \cos(y) + y \sin(x) + h(y)$, para alguma função h , e da segunda, integrando em ordem a y , $f(x, y) = y \sin(x) + x \cos(y) + g(x)$. Comparando as duas expressões, concluímos que $f(x, y) = x \cos(y) + y \sin(x)$ é o potencial do campo vectorial dado.

EXEMPLO 3: Consideremos o campo vectorial \mathbf{F} definido por $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, 2yz)$. Verifiquemos que é um campo de gradientes. Se existir $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2yz.$$

Da primeira igualdade deduzimos, integrando em ordem a x , $f(x, y, z) = x^2y + h(y, z)$, para alguma função h , da segunda, integrando em ordem a y , $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + g(x, z)$ e da terceira, integrando em ordem a z , $f(x, y, z) = x^2y + u(x, y)$. Comparando as três expressões, concluímos que $f(x, y, z) = x^2y + yz^2$ é o potencial do campo vectorial dado.

Temos as seguintes condições necessárias para que um campo vectorial seja um campo de gradientes:

Proposição 16 *Seja $\mathbf{F} = (F_1, F_2) \in \mathcal{V}_1(\Omega)$ um campo de gradientes, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Então*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

isto é, \mathbf{F} é fechado.

Demonstração: Por hipótese, \mathbf{F} é um campo de gradientes. Então existe $f \in C^1(\Omega)$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Como \mathbf{F} é de classe C^1 , temos f de classe C^2 . Assim,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

que são iguais pelo Teorema de Schwarz.

NOTA: O recíproco deste teorema não é verdadeiro: um campo vectorial pode ser fechado sem que se trate de um campo de gradientes. Veremos mais adiante um exemplo.

Temos um resultado análogo em dimensão 3:

Proposição 17 *Seja $\mathbf{F} \in \mathcal{V}_1(\Omega)$ um campo de gradientes, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Então $\text{rot}(\mathbf{F}) = 0$.*

Demonstração: Basta fazer o cálculo: existe $f \in C^1(\Omega)$, tal que

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (F_1, F_2, F_3) = \mathbf{F}.$$

Como, por hipótese, \mathbf{F} é de classe C^1 , temos na realidade $f \in C^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{F}) &= \nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

pelo Teorema de Schwarz.

NOTA: O recíproco deste teorema não é verdadeiro: um campo vectorial pode ter um rotacional nulo sem que se trate de um campo de gradientes. Veremos mais adiante um exemplo.

É extremamente simples calcular o integral de um campo de gradientes ao longo de uma linha:

Teorema 3.2.10 (Teorema Fundamental dos integrais de linha) *Seja $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização regular de uma linha \mathcal{C} . Seja $\mathbf{F} = \nabla f \in \mathcal{V}(\Omega)$ um campo de gradientes, com $\mathcal{C} \subset \Omega$. Então*

$$\int_{(\mathcal{C}, \phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{(\mathcal{C}, \phi)} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\phi(b)) - f(\phi(a)).$$

Demonstração:

$$\int_{(\mathcal{C}, \phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \nabla f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\phi(t)) \cdot \phi'_k(t) \right) dt,$$

onde ϕ_k é a k -ésima componente de ϕ . Assim:

$$\int_{(\mathcal{C}, \phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{d}{dt} (f(\phi(t))) dt = f(\phi(b)) - f(\phi(a)).$$

EXEMPLO 3: Consideremos o campo vectorial \mathbf{F} definido por $F(x, y) = (2xy, x^2 - y)$. Sabemos

que é um campo de gradientes pois $\nabla f = F$, sendo $f(x, y) = x^2y - \frac{y^2}{2}$. Então, se \mathcal{C} é uma linha que une os pontos $(0, 2)$ e $(1, -4)$,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(1, -4) - f(0, 2) = -10.$$

EXEMPLO 4: Seja \mathbf{F} o campo vectorial $F(x, y) = (\cos(y) + y \cos(x), \sin(x) - x \sin(y))$. Sabemos que é um campo de gradientes, porque $\nabla f = F$ com $f(x, y) = x \cos(y) + y \sin(x)$. Então, se \mathcal{C} é uma linha que une os pontos $(\pi, 0)$ e $(-2\pi, 2\pi)$,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(-2\pi, 2\pi) - f(\pi, 0) = -3\pi.$$

EXEMPLO 5: Consideremos o campo vectorial \mathbf{F} definido por $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, 2yz)$. Sabemos que é um campo de gradientes porque $\nabla f = F$ com $f(x, y, z) = x^2y + yz^2$. Então, se \mathcal{C} é uma linha que une os pontos $(1, 1, 1)$ e $(-2, 1, -2)$,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(-2, 1, -2) - f(1, 1, 1) = 6.$$

Definição 3.2.35 Seja $\mathbf{F} \in \mathcal{V}(\Omega)$ um campo vectorial e $A, B \in \Omega$. Dada uma linha \mathcal{C} parametrizada por $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\phi(a) = A$ e $\phi(b) = B$, diremos que

$$\int_{(\mathcal{C}, \phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

é **independente do caminho** se para toda a linha paramétrica $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\phi})$ de extremidades A e B , orientada de A para B ,

$$\int_{(\mathcal{C}, \phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\phi})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Voltando à interpretação deste integral enquanto trabalho de uma força: mostrámos que o trabalho de uma força conservativa não depende do percurso, apenas do ponto de partida e do ponto de chegada.

Definição 3.2.36 Um aberto Ω diz-se **conexo por arcos** se para todo $A, B \in \Omega$, existir uma linha $\mathcal{C} \subset \Omega$ de extremidades A e B .

Temos o seguinte resultado principal:

Teorema 3.2.11 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, conexo por arcos, e $\mathbf{F} \in \mathcal{V}(\Omega)$ um campo vectorial. As seguintes propriedades são equivalentes:

- (i) \mathbf{F} é um campo de gradientes.
- (ii) Para todo o contorno $\mathcal{C} \subset \Omega$, $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.
- (iii) Para toda linha paramétrica regular (\mathcal{C}, ϕ) contida em Ω , $\int_{(\mathcal{C}, \phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ é independente do caminho.

Demonstração: (i) \Rightarrow (ii) Seja $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização regular de um contorno \mathcal{C} , com $\phi(a) = \phi(b)$. Vimos que se $\mathbf{F} = \nabla f$ é um campo de gradientes, então

$$\oint_{(\mathcal{C}, \phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{(\mathcal{C}, \phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(\phi(b)) - f(\phi(a)) = 0.$$

(ii) \Rightarrow (iii) Sejam $A, B \in \Omega$ e (\mathcal{C}, ϕ) e $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\phi})$ duas linhas paramétricas orientadas de A para B . Se $\phi : [a, b] \rightarrow \Omega$ e $\tilde{\phi} : [c, a] \rightarrow \Omega$, consideremos a parametrização $\psi : [c, b] \rightarrow \Omega$ definida por

$$\psi(t) = \begin{cases} \tilde{\phi}(t), & \text{se } t \in [c, a] \\ \phi^*(t), & \text{se } t \in [a, b] \end{cases}$$

Como $\psi(c) = \psi(b)$, ψ parametriza um contorno:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_c^b \mathbf{F}(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \int_c^a \mathbf{F}(\tilde{\phi}(t)) \cdot \tilde{\phi}'(t) dt + \int_a^b \mathbf{F}(\phi^*(t)) \cdot \phi^{*\prime}(t) dt \\ &= \int_{(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\phi})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{(\mathcal{C}, \phi^*)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\phi})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{(\mathcal{C}, \phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned}$$

donde se conclui

$$\int_{(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\phi})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{(\mathcal{C}, \phi)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

pelo que o integral é independente do caminho.

(iii) \Rightarrow (i) Seja $A \in \Omega$. Para $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, consideremos uma linha \mathcal{C} orientada de A para X . Tal linha existe visto que Ω é conexo por arcos. Seja

$$f(X) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Esta função está bem definida já que o integral não depende do caminho, apenas dos pontos A (fixo) e X .

Para $h > 0$ suficientemente pequeno, consideremos o caminho \mathcal{C}_h parametrizado por

$$\phi : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi(t) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n) \in \Omega.$$

Então $\phi'(t) = (1, 0, \dots, 0)$, pelo que

$$f(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{\mathcal{C}_h} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^h \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \int_0^h F_1(\phi(t)) dt.$$

Dividindo esta igualdade por h e fazendo h tender para 0, obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X) = F_1(\phi(0)) = F_1(X).$$

De modo análogo, pode mostrar-se que para todo $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(X) = F_k(\phi(0)) = F_k(X),$$

pelo que $\mathbf{F} = \nabla f$ e \mathbf{F} é um campo de gradientes.

Vimos na Proposição 16 que se \mathbf{F} for um campo de gradientes então é fechado, mas referiu-se que o recíproco deste resultado não era verdadeiro. Vejamos um exemplo desta afirmação.

EXEMPLO 7: Para $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, consideremos o campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Temos

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

No entanto, não se trata de um campo de gradientes. Integrando este campo ao longo da circunferência $\mathcal{C} \subset \Omega$ centrada em $(0,0)$ e de raio 1, parametrizada por $\phi(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, obtém-se

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)}, \frac{\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \right) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Definição 3.2.37 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Ω diz-se **simplesmente conexo** se, qualquer que seja a curva de Jordan em Ω , o conjunto de pontos delimitado pela curva está contido em Ω .*

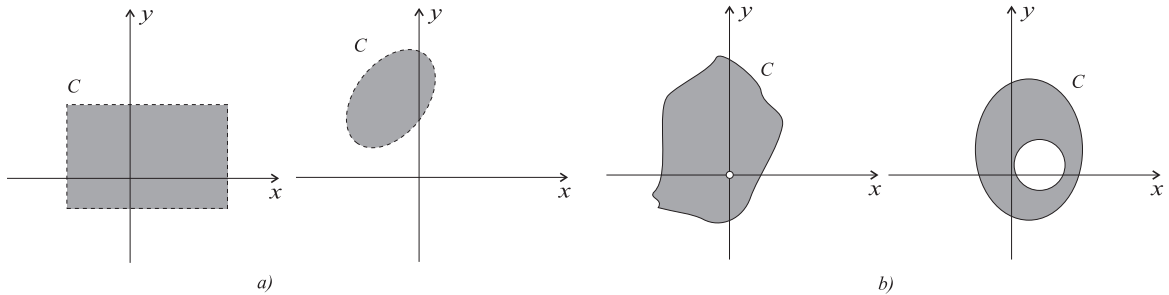


Figura 3.28 a) Conjuntos simplesmente conexos e b) conjuntos multiplamente conexos.

Temos o seguinte teorema, que apresentamos sem demonstração:

Teorema 3.2.12 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto simplesmente conexo e $\mathbf{F} \in \mathcal{V}_1(\Omega)$. Então,*

(i) *Se $n = 2$,*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) \Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ é um campo de gradientes.}$$

(ii) *Se $n = 3$,*

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ é um campo de gradientes.}$$

EXEMPLO 8: Consideremos o campo $\mathbf{F} = (3x^2y + y, x^3 + x + 1)$ definido em \mathbb{R}^2 .

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x + 1) = 3x^2 + 1 :$$

Como \mathbb{R}^2 é simplesmente conexo, temos a garantia de que \mathbf{F} é um campo de gradientes: $\mathbf{F} = \nabla f$.

Determinemos f , isto é, determinemos a função f que satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 + x + 1 \end{cases}$$

Integrando a primeira equação em ordem a x , obtemos

$$f(x, y) = x^3y + yx + h(y).$$

Aqui, a constante de integração é uma função que depende de y . Substituindo na segunda equação:

$$x^3 + x + h'(y) = x^3 + x + 1,$$

donde concluímos que $h'(y) = 1$, pelo que $h(y) = y + c$, $c \in \mathbb{R}$. Finalmente,

$$F(x, y) = x^3y + yx + y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3.3 Formas diferenciais

Neste capítulo, apresentamos uma outra perspectiva sobre os campos de vectores: as formas diferenciais.

Definição 3.3.38 *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto de \mathbb{R}^n . Uma **forma diferencial** sobre Ω é uma aplicação*

$$\omega : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

onde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é o espaço das aplicações lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} .

Uma base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ são as aplicações

$$dx_k : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow x_k, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Assim, as formas diferenciais ω são da forma

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n,$$

onde as funções de valores reais f_k estão definidas em Ω . A forma diferenciável ω diz-se de classe C^p se as funções f_k são de classe C^p .

EXEMPLO: Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no aberto Ω . Para cada $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $df(x_1, \dots, x_n)$ é uma aplicação linear de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} . Assim, a aplicação $\omega = df : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow df(x_1, \dots, x_n)$ é uma forma diferenciável sobre Ω . Vimos na primeira parte deste curso que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

ou seja, $f_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$, qualquer que seja $k \in \{1, \dots, n\}$.

3.3.1 Formas diferenciais e campos vectoriais

Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n . Vimos que toda a forma diferencial ω sobre Ω de classe C^p se escreve na forma

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n,$$

onde as funções f_k são de classe C^p . Assim, podemos associar naturalmente a toda a forma diferencial ω o campo vectorial $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathcal{V}_p(\Omega)$ e reciprocamente. Esta constatação vai permitir definir o integral d uma forma diferencial ao longo de uma linha:

Definição 3.3.39 *Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ uma linha regular e ω uma forma diferencial contínua. Defina-se*

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

onde $\mathbf{F} \in \mathcal{V}_o(\Omega)$ é o campo vectorial associado a Ω . Se \mathcal{C} for parametrizada por $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_a^b \omega(\phi(t))(\phi'(t)) dt.$$

EXEMPLO 1: Seja \mathcal{C} o segmento em \mathbb{R}^2 que une os pontos $(0, 0)$ e $(3, 2)$, orientado de $(0, 0)$ para $(3, 2)$, que podemos parametrizar por

$$\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (1-t)(0, 0) + t(3, 2) = (3t, 2t).$$

Então

$$\int_{\mathcal{C}} xy dx + y^2 dy = \int_0^1 (3t \cdot 2t \cdot 3 + (2t)^2 \cdot 2) dt = \int_0^1 (18t^2 + 8t^2) dt = \int_0^1 26t^2 dt = \frac{26}{3}.$$

EXEMPLO 2: Seja \mathcal{C} a hélice em \mathbb{R}^3 parametrizada por $\phi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} y dx + x dy + z^2 dz &= \int_0^{2\pi} (\sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t) \cos(t) + t^2) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) - \sin^2(t) + t^2) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos(2t) + t^2) dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

Definição 3.3.40 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e ω uma forma diferencial de classe C^1 . Seja $\mathbf{F} \in \mathcal{V}_1(\Omega)$ o campo vectorial associado. Então:*

- (i) *Se \mathbf{F} é um campo de gradientes, ω diz-se uma **forma exacta**, isto é, existe uma função $f \in C^1(\Omega)$ tal que $\omega = df$.*
- (ii) *Se $n = 3$, ω diz-se uma **forma diferencial fechada** se $\text{rot}(\mathbf{F}) = 0$.*
- (iii) *Se $n = 2$, ω diz-se uma **forma diferencial fechada** se $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$.*

Temos assim a seguinte propriedade:

Proposição 18 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto simplesmente conexo. Seja ω uma forma diferencial sobre Ω de classe C^1 . Então*

$$\omega \text{ fechada} \Leftrightarrow \omega \text{ exacta} .$$

Temos ainda o teorema análogo ao Teorema 3.2.11:

Teorema 3.3.13 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo por arcos e ω uma forma diferencial sobre Ω . As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) ω é uma forma exacta.
- (ii) Para todo o contorno $\mathcal{C} \subset \Omega$, $\oint_{\mathcal{C}} \omega = 0$.
- (iii) Para toda linha paramétrica regular (\mathcal{C}, ϕ) contida em Ω , $\int_{(\mathcal{C}, \phi)} \omega$ é independente do caminho.

3.4 Teorema de Green

Teorema 3.4.14 (Teorema de Jordan) *Uma curva de Jordan determina dois conjuntos abertos do plano, \mathcal{C}_{int} e \mathcal{C}_{ext} , verificando:*

- (i) $\mathbb{R}^2 = \mathcal{C}_{int} \cup \mathcal{C}_{ext} \cup \mathcal{C}$.
- (ii) \mathcal{C}_{int} é limitado e simplesmente conexo.
- (iii) \mathcal{C}_{ext} é ilimitado e conexo por arcos.

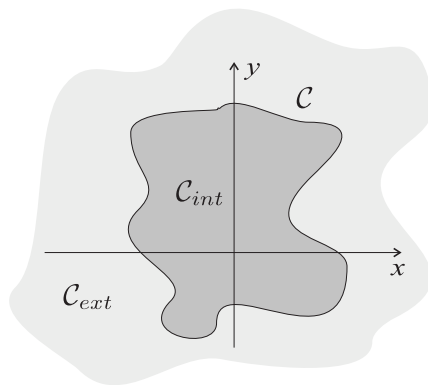


Figura 3.29 Uma curva de Jordan.

Apesar de (em aparência) o Teorema de Jordan parecer evidente, a sua prova formal é extremamente trabalhosa, pelo que será omitida.

Falaremos de curva de Jordan regular se ϕ for uma parametrização regular e de curva de Jordan seccionalmente regular, se a velocidade ϕ' se anular num subconjunto finito de $[a, b]$.

Enunciamos agora o Teorema de Green:

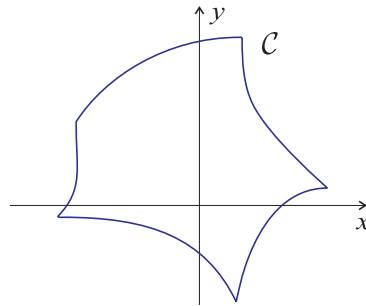


Figura 3.30 Uma curva de Jordan seccionalmente regular.

Teorema 3.4.15 (Teorema de Green) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ um campo vectorial de classe C^1 . Seja $C \subset \Omega$ uma curva de Jordan seccionalmente regular orientada directamente. Então, se $C_{int} \subset \Omega$, tem-se*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{C_{int}} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA,$$

ou, em notação diferencial,

$$\oint_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \iint_{C_{int}} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA.$$

Demonstração: Vamos apenas demonstrar o Teorema de Green no caso de C_{int} ser um conjunto misto, isto é, um conjunto que é, em simultâneo, horizontal e verticalmente simples.

Consideremos os campos $\mathbf{F}_1 = (f, 0)$ e $\mathbf{F}_2 = (0, g)$. Tratando C_{int} como um conjunto verticalmente simples:

$$C_{int} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \wedge h_1(x) < y < h_2(x)\}.$$

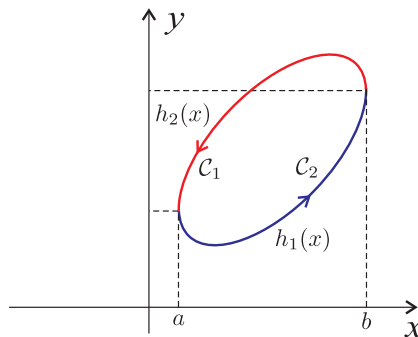


Figura 3.31 O conjunto C_{int} é verticalmente simples.

Sendo C_j , $j = 1, 2$, a linha parametrizada por $\phi_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi_j(t) = (t, h_j(t))$:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}_1 \cdot ds &= \oint_C f(x, y) dx + 0 dy = \int_{C_2} f(x, y) dx + 0 dy - \int_{C_1} f(x, y) dx + 0 dy \\
&= \int_a^b (f(t, h_2(t)), 0) \cdot (1, h_2'(t)) dt - \int_a^b (f(t, h_1(t)), 0) \cdot (1, h_1'(t)) dt \\
&= \int_a^b f(t, h_2(t)) dt - \int_a^b f(t, h_1(t)) dt = - \int_a^b [f(t, y)]_{h_2(t)}^{h_1(t)} dt \\
&= - \int_a^b \int_{h_2(t)}^{h_1(t)} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dy = - \iint_{C_{int}} \frac{\partial f}{\partial y} dA.
\end{aligned}$$

Tratemos agora C_{int} como um conjunto horizontalmente simples:

$$C_{int} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < d \wedge \tilde{h}_1(y) < x < \tilde{h}_2(y) \right\}.$$

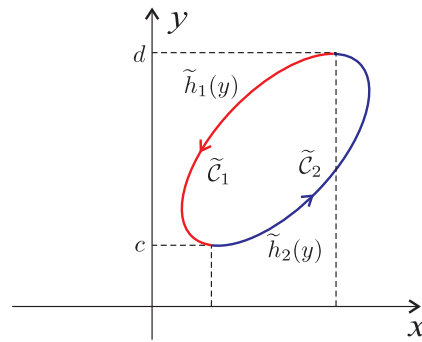


Figura 3.32 O conjunto C_{int} é horizontalmente simples.

Sendo \tilde{C}_j a linha parametrizada por $\psi_j : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi(t) = (\tilde{h}_j(t), t)$:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}_2 \cdot ds &= \oint_C 0 dx + g(x, y) dy = \int_{\tilde{C}_2} 0 dx + g(x, y) dy - \int_{\tilde{C}_1} 0 dx + g(x, y) dy \\
&= \int_c^d (0, g(\tilde{h}_2(t), t)) \cdot (\tilde{h}_2'(t), 1) dt - \int_c^d (0, g(\tilde{h}_1(t), t)) \cdot (\tilde{h}_1'(t), 1) dt \\
&= \int_c^d g(\tilde{h}_2(t), t) dt - \int_c^d g(\tilde{h}_1(t), t) dt \\
&= \int_c^d \int_{\tilde{h}_1(t)}^{\tilde{h}_2(t)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dx = \iint_{C_{int}} \frac{\partial g}{\partial x} dA.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot ds = \int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_C \mathbf{F}_1 \cdot ds + \int_C \mathbf{F}_2 \cdot ds = \iint_{C_{int}} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA.$$

NOTAS:

- (i) Se $\mathcal{C}_{int} \not\subset \Omega$, o duplo integral do segundo membro não faria sentido, uma vez que as funções f e g apenas estão definidas em Ω .
- (ii) Sabemos que se \mathbf{F} é um campo fechado definido num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo, então \mathbf{F} é conservativo. O Teorema de Green “contém” de certa forma este resultado.

De facto, se Ω é simplesmente conexo, para toda a curva de Jordan $\mathcal{C} \subset \Omega$ tem-se $\mathcal{C}_{int} \subset \Omega$, visto Ω não possuir “buracos”. Assim, se \mathbf{F} é fechado,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathcal{C}_{int}} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA = \iint_{\mathcal{C}_{int}} 0 dA = 0.$$

Então, como todos os integrais ao longo de curvas simples fechadas são nulos, \mathbf{F} é um campo conservativo.

EXEMPLO 1: Seja \mathcal{C} a circunferência centrada em 0 e de raio 1 (orientada no sentido directo) e $\omega = (e^{x^2 \cos(x)} - y^3)dx + (e^{y^2} + x^3)dy$.

Para calcular $I = \oint_{\mathcal{C}} \omega$, poderíamos, por exemplo, parametrizar a circunferência do seguinte modo:

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (e^{\cos^2(t)} \cos(\cos(t)) - \sin^3(t), e^{\sin^2(t)} + \cos^3(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin(t) (e^{\cos^2(t)} \cos(\cos(t)) - \sin^3(t)) + \cos(t) (e^{\sin^2(t)} + \cos^3(t)) dt \end{aligned}$$

Este integral não pode ser calculado explicitamente. No entanto, como \mathcal{C} é uma curva de Jordan regular e ω está definida em \mathcal{C}_{int} , podemos aplicar o Teorema de Green:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathcal{C}_{int}} \frac{\partial}{\partial x} (e^{y^2} + x^3) - \frac{\partial}{\partial y} (e^{x^2 \cos(x)} + y^3) dA \\ &= \iint_{\mathcal{C}_{int}} (3x^2 + 3y^2) dA = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta \quad (\text{em coordenadas polares}) \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2: Seja \mathcal{T} o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$. Seja $F(x, y) = (x^2y, x)$ um campo de forças. Qual o trabalho W realizado por \mathbf{F} sobre um ponto material que percorre uma vez \mathcal{T} no sentido directo? A linha \mathcal{T} é uma curva de Jordan seccionalmente regular e o campo vectorial está definido no seu interior. Assim:

$$W = \oint_{\mathcal{T}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathcal{T}_{int}} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x) - \frac{\partial}{\partial y} (x^2y) \right) dA = \iint_{\mathcal{T}_{int}} (1 - x^2) dA$$

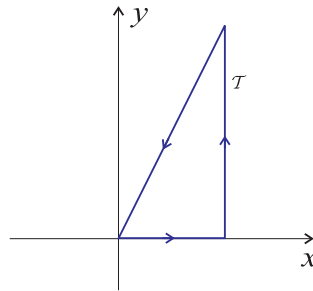


Figura 3.33 A curva de Jordan do Exemplo 2.

Como $\mathcal{T}_{int} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 2x\}$,

$$W = \int_0^1 \int_0^{2x} (1 - x^2) dy dx = \int_0^1 2x(1 - x^2) dx = -\frac{1}{2}[(1 - x^2)^2]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

De notar que o campo \mathbf{F} não é conservativo.

O Teorema de Green pode ainda ser útil para calcular a área do interior de uma curva de Jordan. De facto,

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}_{int}) = \iint_{\mathcal{C}_{int}} dA = \oint_{\mathcal{C}} f(x, y) dx + g(x, y) dy,$$

onde f e g devem ser escolhidas por forma a que $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 1$.

Temos assim

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}_{int}) = \oint_{\mathcal{C}} x dy = - \oint_{\mathcal{C}} y dx = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} -y dx + x dy.$$

EXEMPLO 3: Por exemplo, vamos calcular a área do interior da elipse \mathcal{E} de eixos a e b . Tal elipse pode ser parametrizada por

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (a \cos(t), b \sin(t)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{E}_{int}) &= \oint_{\mathcal{E}} x dy = \int_0^{2\pi} (a \cos(t), 0) \cdot (-a \sin(t), b \cos(t)) dt \\ &= ab \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = ab \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2 \cos(2t)}{2} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

3.5 Superfícies em \mathbb{R}^3

Vimos que uma linha no espaço pode ser parametrizada por uma função ϕ definida num intervalo I de \mathbb{R} . De modo análogo, podemos parametrizar uma superfície no espaço através de uma função definida numa região de \mathbb{R}^2 . Ao definirmos linha em \mathbb{R}^2 verificámos que essa noção incluía como caso particular as curvas que são gráficos de funções reais de variável real. Neste capítulo, ao definir superfície paramétrica veremos que estamos a incluir o gráfico de uma função real de duas variáveis reais.

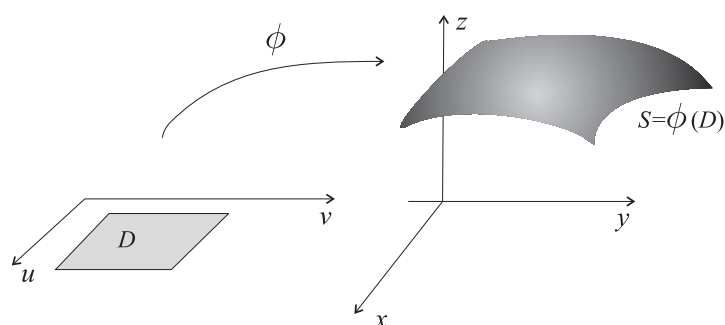


Figura 3.34 Parametrização de uma superfície.

Definição 3.5.41 O conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma **superfície** se existir uma função contínua

$$\begin{aligned} \phi: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

tal que $S = \phi(\mathcal{D})$. Diz-se que ϕ é uma parametrização de S . Se ϕ é diferenciável ou de classe C^1 diz-se que a superfície é diferenciável ou de classe C^1 .

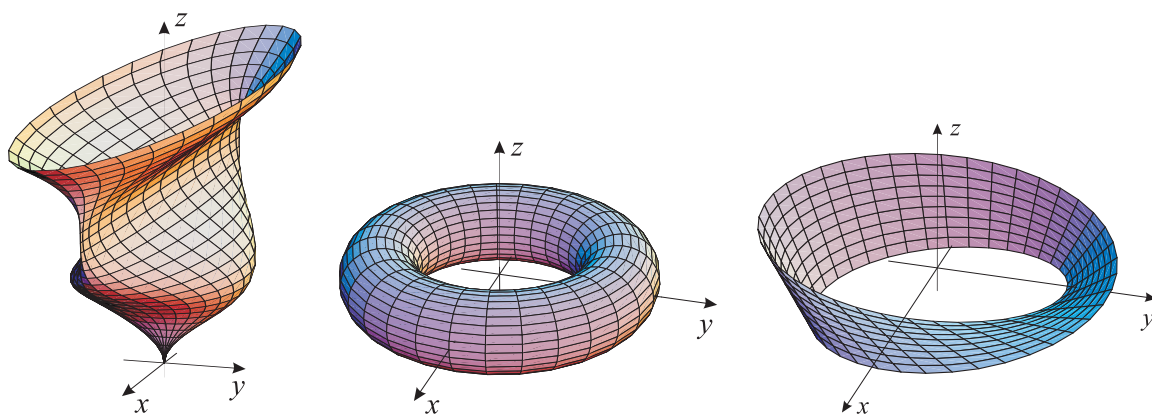


Figura 3.35 Exemplos de superfícies em \mathbb{R}^3 .

Antes de prosseguirmos vejamos alguns exemplos de parametrizações.

EXEMPLO 1: Consideremos a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, em \mathbb{R}^3 . Usando coordenadas

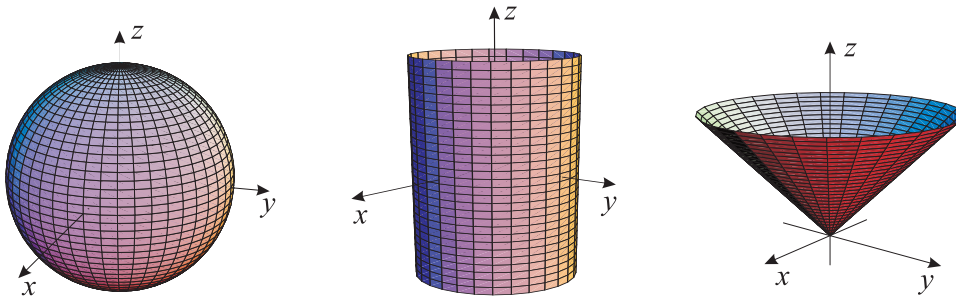


Figura 3.36 Uma esfera, um cilindro e um cone.

esféricas podemos escrever

$$x = a \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), \quad y = a \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), \quad z = a \cos(\varphi),$$

onde $\varphi \in [0, \pi]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. A função $\phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(\theta, \varphi) = (x, y, z)$ é uma parametrização da esfera de centro em $(0, 0, 0)$ e raio a (ver Figura 3.36).

EXEMPLO 2: O cilindro $x^2 + y^2 = 9$ com $0 \leq z \leq 4$, pode ser parametrizado do seguinte modo:

$$x = 3 \cos(\theta), \quad y = 3 \operatorname{sen}(\theta), \quad z = z,$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 4$, tendo em conta que em coordenadas cilíndricas o cilindro tem a representação $r = 3$ (ver Figura 3.36).

Seja $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$. O gráfico de f

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{D} \wedge z = f(x, y)\}$$

é uma superfície parametrizada por

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow \phi(u, v) = (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

EXEMPLO 3: Seja $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Uma parametrização da superfície que é o gráfico desta função é

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

EXEMPLO 4: Consideremos o plano paralelo a dois vectores α e β e que passa no ponto $X_0 = (a, b, c)$. Designemos por $N = (A, B, C)$ o vector $\alpha \times \beta$. Sabemos que este vector é perpendicular ao plano. A equação do plano pode escrever-se $A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$

A função $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\phi(u, v) = X_0 + u\alpha + v\beta$, é uma parametrização do plano gerado pelos vectores α e β .

Se a superfície é uma superfície de revolução obtida pela rotação do gráfico de uma função $y = f(x)$, definida no intervalo $[a, b]$, em torno do eixo dos xx , podemos parametrizá-la do seguinte modo:

$$x = u, \quad y = f(u) \cos(v), \quad z = f(u) \operatorname{sen}(v),$$

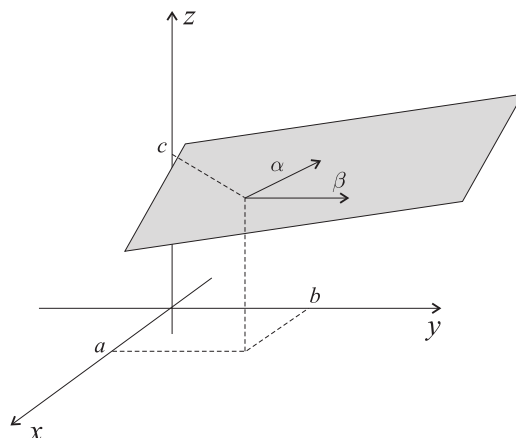


Figura 3.37 O plano gerado por α e β e que passa no ponto (a, b, c) .

onde $a \leq u \leq b$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

EXEMPLO 5: Seja $y = e^{-x}$, $x \in [0, 3]$. A superfície que se obtém rodando a curva em torno do eixo dos xx está representada na Figura 3.38 e tem a parametrização

$$x = u, \quad y = e^{-u} \cos(v), \quad z = e^{-u} \sin(v),$$

onde $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

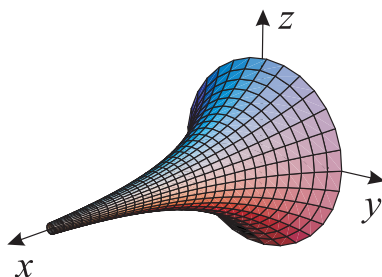


Figura 3.38 Uma superfície de revolução.

Definição 3.5.42 Uma função $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ diz-se **regular** no ponto (u_0, v_0) se é continuamente diferenciável e a matriz jacobiana de ϕ nesse ponto tem característica 2. A função ϕ diz-se regular em \mathcal{D} se for regular em todos os pontos de \mathcal{D} .

Vejamos esta definição com mais pormenor.

Seja \mathcal{S} uma superfície parametrizada por uma função diferenciável $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Para u_0 fixo, $\phi_1 : v \rightarrow \phi(u_0, v)$ parametriza uma linha \mathcal{C}_1 traçada sobre \mathcal{S} . Assim, o vector velocidade

$$T_u(u_0, v_0) = \phi'_1(v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

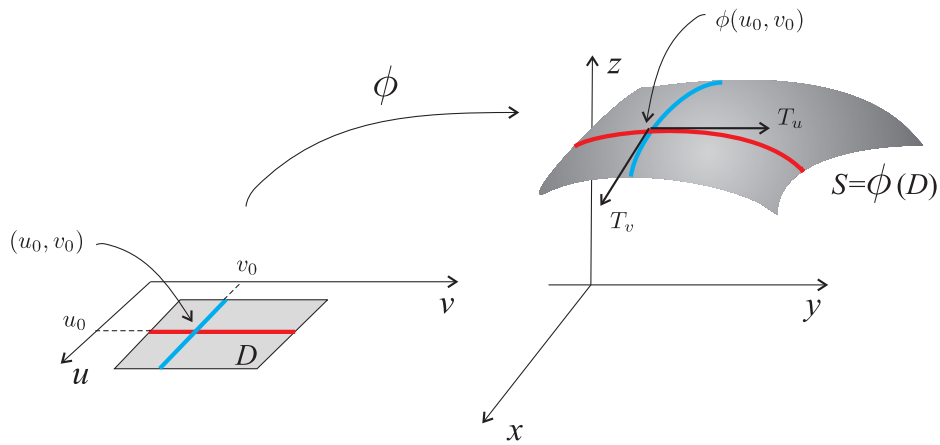


Figura 3.39 Os vetores tangentes.

é tangente a \mathcal{C}_1 , logo a \mathcal{S} .

Da mesma forma, considerando a linha \mathcal{C}_2 parametrizada por $\phi_2 : u \rightarrow \phi(u, v_0)$, o vector

$$T_v(u_0, v_0) = \phi'_1(v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

é tangente a \mathcal{S} .

Suponhamos que estes dois vectores, T_u e T_v são linearmente independentes. Sendo assim, geram um plano que é o plano tangente à superfície \mathcal{S} .

Portanto, o plano tangente existe se pudermos garantir que os vectores T_u e T_v são linearmente independentes no ponto (u_0, v_0) . Mas as coordenadas destes vectores são as colunas da matriz jacobiana da função ϕ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Conhecemos o seguinte teorema da Álgebra Linear:

Teorema 3.5.16 *Seja $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada por uma função diferenciável $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (x, y, z)$. São equivalentes as seguintes condições:*

- (a) $T_u(u_0, v_0)$ e $T_v(u_0, v_0)$ são linearmente independentes;
- (b) A característica da matriz jacobiana de ϕ no ponto (u_0, v_0) é 2;
- (c) $T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) \neq 0$.

De acordo com este teorema, os vectores tangentes T_u e T_v de uma superfície regular são independentes e, portanto, geram um plano.

Definição 3.5.43 *Seja \mathcal{S} uma superfície regular. O plano tangente a \mathcal{S} no ponto $\phi(u_0, v_0)$ é o plano gerado pelos vectores $T_u(u_0, v_0)$ e $T_v(u_0, v_0)$.*

O vector $T_u \times T_v$ é ortogonal aos vectores T_u e T_v e, conseqüentemente, é ortogonal ao plano tangente à superfície no ponto $\phi(u_0, v_0) = (a, b, c)$. A equação do plano tangente é

$$(x - a, y - b, z - c) \cdot (T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)) = 0.$$

EXEMPLO 6: Seja $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Vimos que o gráfico de f

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{D} \wedge z = f(x, y)\}$$

é uma superfície parametrizada por

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow \phi(u, v) = (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

Então $T_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right)$ e $T_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right)$. O vector

$$T_u \times T_v = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial f}{\partial v}(u, v), 1\right)$$

é normal a G_f . Obtemos a equação do plano tangente à superfície em $M = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

EXEMPLO 7: A função $\phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(\theta, \varphi) = (x, y, z)$ onde

$$x = a \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), \quad y = a \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), \quad z = a \cos(\varphi),$$

é uma parametrização da esfera de centro em $(0, 0, 0)$ e raio a , $a > 0$. Então

$$T_\theta = (-a \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), a \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), 0)$$

e

$$T_\varphi = (a \cos(\varphi) \cos(\theta), a \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), -a \operatorname{sen}(\varphi)).$$

O vector

$$T_\theta \times T_\varphi = (-a^2 \operatorname{sen}^2(\varphi) \cos(\theta), -a^2 \operatorname{sen}^2(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), -a^2 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi))$$

é normal à esfera. Consideremos o ponto $\phi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. Obtemos

$$T_\theta \times T_\varphi = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{4}, -\frac{a^2\sqrt{2}}{4}, -\frac{a^2}{2}\right)$$

e a equação do plano tangente à superfície em $M = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$\left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{a}{2}, z - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{4}, -\frac{a^2\sqrt{2}}{4}, -\frac{a^2}{2}\right) = 0,$$

ou seja, $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z - 2a\sqrt{2} = 0$.

EXEMPLO 8: Uma parametrização da superfície que é o gráfico de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ é

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Então $T_u = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)$ e $T_v = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)$. O vector

$$T_u \times T_v = \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1\right)$$

é normal a G_f . Obtemos a equação do plano tangente à superfície em $M = (x_0, y_0, \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$:

$$z = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - (x - x_0) \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)_{(x_0, y_0)} - (y - y_0) \left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)_{(x_0, y_0)}.$$

Note-se que esta superfície é regular em todos os pontos à excepção do ponto $(0, 0, 0)$.

3.5.1 Integral de superfície

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Seja \mathcal{S} uma superfície parametrizada por $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, com $\mathcal{S} \subset \Omega$.

Trata-se agora de definir um integral de superfície $\iint_{\mathcal{S}} f dS$.

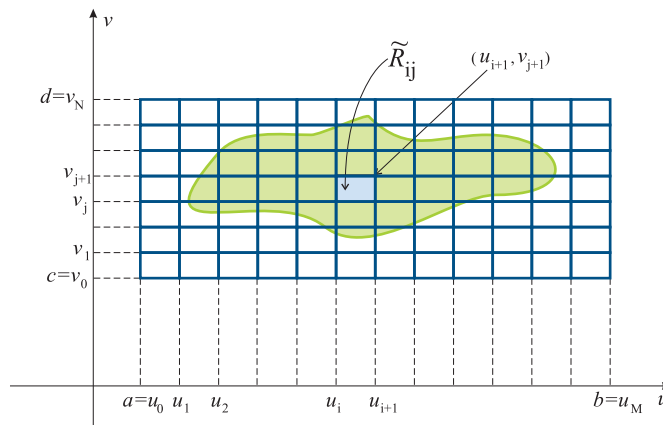


Figura 3.40 A partição P .

Começamos por fazer uma partição de \mathcal{D} . Sejam a, b, c, d tais que $\mathcal{D} \subset [a, b] \times [c, d]$. Seja

$$P = \{(u_i, v_j) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq i \leq M \wedge 0 \leq j \leq N\},$$

com $a = u_0 < u_1 < \dots < u_M = b$ e $c = v_0 < v_1 < \dots < v_N = d$.

Escrevemos então

$$\mathcal{D} = \cup R_{i,j},$$

onde $R_{i,j} = \mathcal{D} \cap \tilde{R}_{i,j}$ e $\tilde{R}_{i,j}$ é o rectângulo plano de vértices (u_i, v_j) , (u_{i+1}, v_j) , (u_i, v_{j+1}) e (u_{i+1}, v_{j+1}) (note-se que $R_{i,j}$ não é necessariamente um rectângulo):

Designando por $A_{i,j}$ a área da projecção de $\phi(R_{i,j})$ no plano tangente a \mathcal{S} no ponto $\phi(u_i, v_j)$, escrevemos como habitualmente as somas de Darboux:

$$S_P = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \sup_{(u,v) \in R_{i,j}} f(\phi(u, v)) A_{i,j},$$

e

$$s_P = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \inf_{(u,v) \in R_{i,j}} f(\phi(u, v)) A_{i,j}.$$

Estamos agora em condições de dar a seguinte definição:

Definição 3.5.44 Com as notações anteriores, se $\sup_P S_P = \inf_P S_P$, dizemos que f é integrável em \mathcal{S} e denotamos

$$\iint_{\mathcal{S}} f dS = \sup_P S_P = \inf_P S_P.$$

Sem demonstração, e chamando apenas a atenção para a analogia com os integrais de linha, damos agora a propriedade que permite calcular na prática integrais de superfície:

Proposição 19 Seja \mathcal{S} uma superfície parametrizada por

$$\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com $\mathcal{S} \subset \Omega$. Então,

$$\iint_{\mathcal{S}} f dS = \iint_{\mathcal{D}} f(\phi(u, v)) \|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\| dA,$$

onde $T_u(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right)$ e $T_v(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right)$ são os vectores não colineares tangentes a \mathcal{S} em $\phi(u, v)$ anteriormente definidos.

NOTA: Podemos expressar $\|T_u \times T_v\|$ de outro modo

$$\begin{aligned} T_u \times T_v &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \\ &= \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \end{aligned}$$

portanto,

$$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2}.$$

Como para os integrais de linha, é possível mostrar que a expressão do membro da direita não depende da parametrização ϕ de \mathcal{S} . Caso contrário, esta última proposição não faria sentido!

EXEMPLO 1: Calculemos o integral $\iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dS$ onde \mathcal{S} é a superfície parametrizada por

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = \theta \end{cases}$$

com $(r, \theta) \in D = [-2, 2] \times [0, 2\pi]$. Temos

$$\|T_r \times T_\theta\| = \|(\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \times (-r \sin(\theta), r \cos(\theta), 1)\| = \|(\sin(\theta), -\cos(\theta), r)\| = \sqrt{r^2 + 1}$$

e

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dS &= \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) + 1} \sqrt{r^2 + 1} dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-2}^2 (r^2 + 1) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} + r \right]_{-2}^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{22}{3} d\theta = \frac{44}{3} \pi. \end{aligned}$$

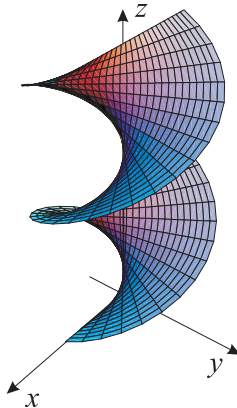


Figura 3.41

EXEMPLO 2: Calculemos o integral $\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y + 1) dS$ onde \mathcal{S} é a superfície parametrizada por

$$\begin{cases} x = 3 \cos(\theta) \\ y = 3 \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

com $(\theta, z) \in D = [0, 2\pi] \times [0, 4]$ (ver Figura 3.42). Temos

$$\|T_\theta \times T_z\| = \|(-3 \sin(\theta), 3 \cos(\theta), 0) \times (0, 0, 1)\| = \|(3 \cos(\theta), 3 \sin(\theta), 0)\| = 3$$

e

$$\begin{aligned}
\iint_S (x^2 + y + 1) dS &= 3 \iint_{\mathcal{D}} (9 \cos^2(\theta) + 3 \operatorname{sen}(\theta) + 1) dA \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^4 (9 \cos^2(\theta) + 3 \operatorname{sen}(\theta) + 1) dz d\theta = 12 \int_0^{2\pi} \left(9 \cdot \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} + 3 \operatorname{sen}(\theta) + 1 \right) d\theta \\
&= 12 \left[\frac{9}{2} \theta + \frac{9}{4} \operatorname{sen}(2\theta) - 3 \cos(\theta) + \theta \right]_0^{2\pi} = 132\pi.
\end{aligned}$$

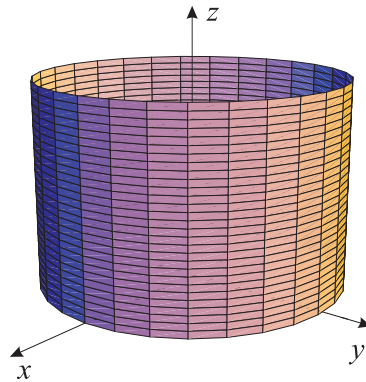


Figura 3.42

EXEMPLO 3: Calculemos o integral $\iint_S yz dS$ onde \mathcal{S} é a porção do plano $2x + 3y + 2z = 1$ que está no primeiro octante. Sendo $f(x, y, z) = yz$, $\phi(u, v) = (u, v, \frac{1}{2}(1 - 2u - 3v))$ e \mathcal{R} a projecção de \mathcal{S} no plano xy (ver Figura 3.43) temos

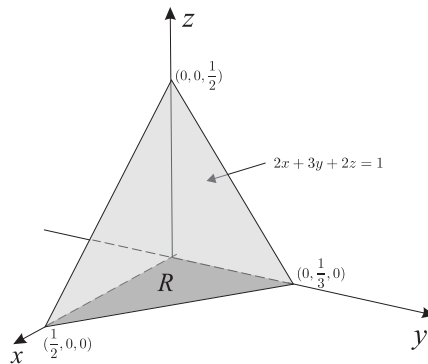


Figura 3.43

$$\begin{aligned}
\|T_u \times T_v\| &= \|(1, 0, -1) \times (0, 1, -\frac{3}{2})\| = \|(1, \frac{3}{2}, 1)\| = \frac{\sqrt{17}}{2} \\
\iint_S yz dS &= \iint_{\mathcal{R}} f(\phi(u, v)) \|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\| dA = \frac{\sqrt{17}}{2} \iint_{\mathcal{R}} v \left(\frac{1}{2}(1 - 2u - 3v) \right) dA =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{17}}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{-\frac{2}{3}u + \frac{1}{3}} (v - 2uv - 3v^2) dv du = \frac{\sqrt{17}}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} [v^2(1 - 2u - 2v)]_0^{-\frac{2}{3}u + \frac{1}{3}} du \\
&= \frac{\sqrt{17}}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}u\right)^3 du = \frac{\sqrt{17}}{216} \left[-\frac{(1-2u)^4}{8}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{1728}
\end{aligned}$$

Teorema 3.5.17

- (a) Seja \mathcal{S} uma superfície com equação $z = g(x, y)$ e seja \mathcal{R} a sua projecção no plano xy . Se g é de classe C^1 em \mathcal{R} e $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em \mathcal{S} então

$$\iint_{\mathcal{S}} f dS = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

- (b) Seja \mathcal{S} uma superfície com equação $y = g(x, z)$ e seja \mathcal{R} a sua projecção no plano xz . Se g é de classe C^1 em \mathcal{R} e $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em \mathcal{S} então

$$\iint_{\mathcal{S}} f dS = \iint_{\mathcal{R}} f(x, g(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1} dA$$

- (c) Seja \mathcal{S} uma superfície com equação $x = g(y, z)$ e seja \mathcal{R} a sua projecção no plano yz . Se g é de classe C^1 em \mathcal{R} e $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em \mathcal{S} então

$$\iint_{\mathcal{S}} f dS = \iint_{\mathcal{R}} f(g(y, z), y, z) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1} dA$$

NOTA: Da mesma forma que para os integrais de linha, obtemos, quando f é a função identicamente igual a 1, a área da superfície de \mathcal{S} :

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dS.$$

EXEMPLO 4: Calcule a área de uma esfera de raio a . Utilizando as coordenadas esféricas é fácil verificar que a esfera centrada na origem e de raio a pode ser parametrizada por:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \\ y = a \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ z = a \cos(\varphi) \end{cases}$$

com $(\theta, \varphi) \in D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Temos

$$T_{\theta} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = (-a \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), a \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), 0)$$

e

$$T_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) = (a \cos(\varphi) \cos(\theta), a \cos(\varphi) \sin(\theta), -a \sin(\varphi)).$$

Logo:

$$T_\theta \times T_\varphi = (-a^2 \sin^2(\varphi) \cos(\theta), -a^2 \sin^2(\varphi) \sin(\theta), -a^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)).$$

A norma deste vector é dada por:

$$\begin{aligned} \|T_\theta \times T_\varphi\| &= \sqrt{a^4 \sin^4(\varphi) \cos^2(\theta) + a^4 \sin^4(\varphi) \sin^2(\theta) + a^4 \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi)} \\ &= \sqrt{a^4 \sin^4(\varphi) + a^4 \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi)} = \sqrt{a^4 \sin^2(\varphi)} = a^2 \sin(\varphi) \end{aligned}$$

porque para $\varphi \in [0, \pi]$, $\sin(\varphi) \geq 0$. A área da esfera é:

$$A = \iint_D \|T_\theta \times T_\varphi\| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta = 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi = 4\pi a^2.$$

EXEMPLO 5: Calculemos a área do cone parametrizado por

$$\begin{cases} x = u \cos(v) \\ y = u \sin(v) \\ z = u \end{cases}$$

com $(u, v) \in D = [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Temos

$$T_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = (\cos(v), \sin(v), 1)$$

e

$$T_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = (-u \sin(v), u \cos(v), 0).$$

Logo:

$$T_u \times T_v = (-u \cos(v), -u \sin(v), u).$$

A norma deste vector é dada por:

$$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{u^2 \cos^2(v) + u^2 \sin^2(v) + u^2} = \sqrt{2} u$$

porque $u \in [0, 1]$. A área do cone é:

$$A = \iint_D \|T_u \times T_v\| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2} u du dv = \sqrt{2} \pi.$$

EXEMPLO 6: Calculemos a área de superfície do cilindro parabólico $y = x^2$ limitado pelos planos $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 2$. Considerando que $y = x^2$ é uma função da forma $y = g(x, z)$ podemos escrever, pelo Teorema 3.5.17, que a área pedida é dada pelo integral

$$\iint_S dS = \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1} dA$$

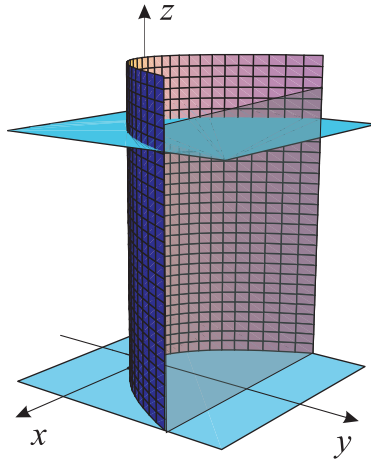


Figura 3.44

onde $\mathcal{R} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2\}$. Então

$$\iint_{\mathcal{S}} dS = \int_0^2 \int_{-1}^1 \sqrt{(2x)^2 + 1} dx dz = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{4x^2 + 1} dx = 2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})$$

EXEMPLO 7: Calculemos a área da superfície que se obtém por rotação em torno do eixo dos xx do gráfico de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Vimos num exemplo anterior que uma parametrização possível é

$$\begin{cases} x = u \\ y = f(u) \cos(v) \\ z = f(u) \operatorname{sen}(v) \end{cases}$$

com $(u, v) \in D = [a, b] \times [0, 2\pi]$. Temos

$$T_u = \left(1, \frac{\partial f}{\partial u} \cos(v), \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{sen}(v) \right)$$

e

$$T_v = \left(0, -f(u) \operatorname{sen}(v), f(u) \cos(v) \right).$$

Logo:

$$T_u \times T_v = \left(f(u) \frac{\partial f}{\partial u}, f(u) \cos(v), -f(u) \operatorname{sen}(v) \right).$$

A norma deste vector é dada por:

$$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{(f(u))^2 \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + (f(u))^2 \cos^2(v) + (f(u))^2 \operatorname{sen}^2(v)} = |f(u)| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2}$$

$$\iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_{\mathcal{R}} \|T_u \times T_v\| dA = \int_0^{2\pi} \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2} du dv = 2\pi \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2} du$$

Vejamos um caso concreto. Suponhamos que $f(x) = \sqrt{x}$, definida em $[0, 1]$. A área da superfície de revolução será

$$\iint_{\mathcal{S}} dS = 2\pi \int_0^1 \sqrt{u} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)^2} du = 2\pi \int_0^1 \sqrt{u + \frac{1}{4}} du = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

3.5.2 Fluxo de um campo de vectores

Pretendemos nesta secção definir integral de superfície de um campo vectorial. Tal como nos integrais de linha veremos mais adiante a questão sobre a dependência ou independência do valor do integral em relação à parametrização da superfície.

Definição 3.5.45 *Seja \mathcal{S} uma superfície parametrizada por $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Seja $\mathbf{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial contínuo em \mathcal{S} . O integral de superfície de \mathbf{F} sobre \mathcal{S} , representado por*

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

é definido por

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}} F(\phi(u, v)) \cdot (T_u \times T_v) du dv.$$

NOTA: A este integral também se chama **fluxo** de \mathbf{F} através de \mathcal{S} .

EXEMPLO 1: Seja \mathcal{S} a esfera de centro em $(0, 0, 0)$ e raio 4 e \mathbf{F} o campo vectorial definido por $F(x, y, z) = (x, y, z)$. No Exemplo 4 da secção anterior vimos que uma parametrização da esfera é

$$\begin{cases} x = 4 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \\ y = 4 \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ z = 4 \cos(\varphi) \end{cases}$$

com $(\theta, \varphi) \in D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

$$T_\theta \times T_\varphi = (-4^2 \operatorname{sen}^2(\varphi) \cos(\theta), -4^2 \operatorname{sen}^2(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), -4^2 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi)).$$

Então

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (F(\phi(\theta, \varphi))) \cdot (T_\theta \times T_\varphi) d\theta d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} -4^3 \operatorname{sen}(\varphi) d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\pi -4^3 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi \\ &= 2\pi [4^3 \cos(\varphi)]_0^\pi = -4^4\pi \end{aligned}$$

EXEMPLO 2: Seja \mathcal{S} a esfera de centro em $(0, 0, 0)$ e raio 4 e \mathbf{F} o campo vectorial definido por $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Consideremos a seguinte parametrização da esfera

$$\begin{cases} z = 4 \cos(\varphi) \\ y = 4 \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ z = 4 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \end{cases}$$

com $(\theta, \varphi) \in D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

$$T_\theta \times T_\varphi = (4^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi), 4^2 \sin^2(\varphi) \sin(\theta), 4^2 \sin^2(\varphi) \cos(\theta)).$$

Então

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot dS &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (F(\phi(\theta, \varphi))) \cdot (T_\theta \times T_\varphi) d\theta d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 4^3 \sin(\varphi) d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\pi 4^3 \sin(\varphi) d\varphi \\ &= 2\pi [4^3 \cos(\varphi)]_0^\pi = 4^4\pi \end{aligned}$$

Note-se que os integrais dos dois exemplos anteriores diferem apenas no sinal. Este facto deve-se a termos usado duas parametrizações diferentes para a esfera.

Para fixar o sinal precisamos de orientar a superfície.

Definição 3.5.46 Uma superfície regular $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ diz-se **orientável** se for possível definir em cada ponto $x \in \mathcal{S}$ um campo vectorial contínuo $\mathbf{n}(x)$ ortogonal a \mathcal{S} e tal que $\|\mathbf{n}(x)\| = 1$.

Em cada ponto de uma superfície regular \mathcal{S} existem dois vectores unitários normais a \mathcal{S} , \mathbf{n}_1 e $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$. Cada um destes dois vectores pode ser associado a um dos lados da superfície. Uma superfície orientável é, portanto, uma superfície com dois lados: um é o lado positivo e o outro será o lado negativo. Fala-se em **superfície orientada** quando em cada ponto de \mathcal{S} se escolheu um destes dois vectores.

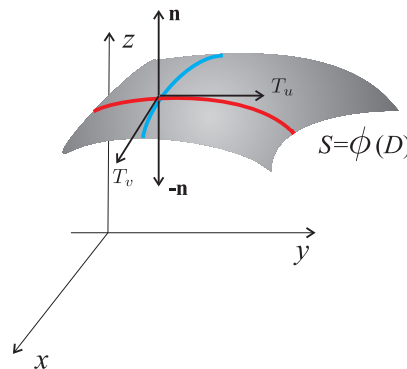


Figura 3.45 Os dois possíveis vectores normais a uma superfície num ponto.

As seguintes superfícies são orientáveis:

- (a) Superfícies que possam ser representadas por uma parametrização, isto é, existe uma função $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{S}$. A parametrização orienta de forma natural a superfície. Vimos que no ponto $\phi(u_0, v_0)$, o vector

$$T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)$$

é normal a \mathcal{S} e a função

$$\frac{T_u(u, v) \times T_v(u, v)}{\|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\|}$$

é contínua. Temos pois duas possibilidades para a escolha do vector $\mathbf{n}(u_0, v_0)$:

$$\mathbf{n}(u_0, v_0) = \pm \frac{T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)}{\|T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)\|}.$$

Se o sinal for positivo, dizemos que a orientação de \mathcal{S} é positiva. Caso contrário, dizemos que a orientação é negativa.

- (b) Superfícies de nível. Se $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e (a, b, c) é um ponto da superfície de nível \mathcal{S} definida por $g(x, y, z) = k$, k constante, então o vector $\nabla g(a, b, c)$ é ortogonal a \mathcal{S} . Escolhemos como campo vectorial normal o gradiente.
- (c) Gráficos de funções. Seja \mathcal{S} o gráfico da função $z = f(x, y)$. Consideremos a função $g(x, y, z) = z - f(x, y)$. O gráfico de f é uma superfície de nível da função g . A orientação do gráfico é a orientação dada pelo vector unitário normal

$$\mathbf{n} = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Dizemos que a superfície está orientada para cima porque a terceira coordenada do vector é positiva.

- (d) Superfícies fechadas: Estas superfícies são fronteiras de sólidos. Para superfícies fechadas, falaremos em orientação positiva (resp. negativa) se os vectores normais estiverem orientados do interior para o exterior (resp. do exterior para o interior).

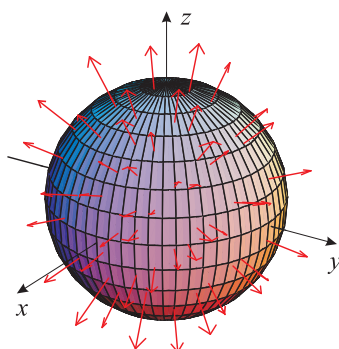


Figura 3.46 Superfície fechada com a orientação positiva.

Notemos que certas superfícies não são orientáveis. Um exemplo famoso é a banda de Möbius (ver Figura 3.47).

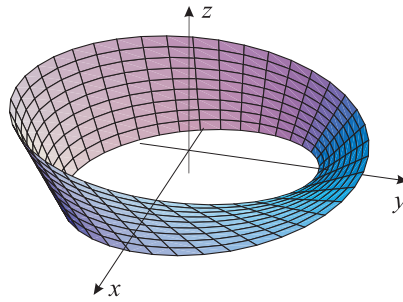


Figura 3.47 A banda de Möbius é uma superfície não orientável.

Teorema 3.5.18 *Seja \mathcal{S} uma superfície orientada e \mathbf{F} um campo vectorial contínuo sobre um aberto Ω , com $\mathcal{S} \subset \Omega$. Então*

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Se \mathcal{S} estiver orientada segundo uma certa parametrização ϕ de \mathcal{S} , tem-se

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(\phi(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) \|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\| \, dA \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(\phi(u, v)) \cdot (T_u(u, v) \times T_v(u, v)) \, dA. \end{aligned}$$

Caso contrário,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(\phi(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) \|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\| \, dA \\ &= - \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(\phi(u, v)) \cdot (T_u(u, v) \times T_v(u, v)) \, dA. \end{aligned}$$

EXEMPLO 3: Cálculo do fluxo do campo $F(x, y, z) = (x, y, xy)$ no parabolóide \mathcal{P} de equação $z = 4 - x^2 - y^2$, $(x, y) \in D = [0, 1] \times [0, 1]$ orientado "para baixo", isto é, o vector normal tem em cada ponto da superfície uma cota negativa.

No ponto de coordenadas (x, y) o plano tangente ao parabolóide é gerado pelos vectores:

$$T_x = (1, 0, -2x) \text{ e } T_y = (0, 1, -2y).$$

Um vector normal à superfície é dado por:

$$T_x \times T_y = (2x, 2y, 1),$$

que é virado "para cima", logo o fluxo é dado por:

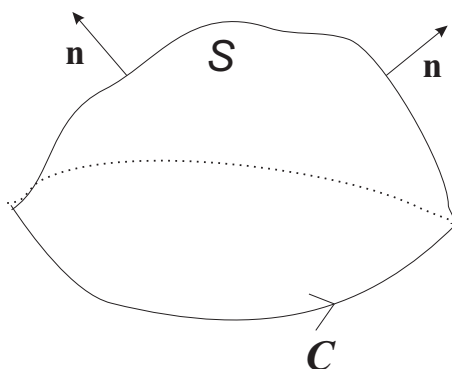
$$\iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F} \cdot (T_x \times T_y) \, dA = \int_0^1 \int_0^1 (x(-2x) + y(-2y) + xy(-1)) \, dx \, dy$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^1 \int_0^1 (2x^2 + 2y^2 + xy) dx dy = - \int_0^1 \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + 2xy^2 \right]_0^1 dy \\
 &= - \int_0^1 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}y + 2y^2 \right) dy = - \left[\frac{2}{3}y + \frac{1}{4}y^2 + \frac{2}{3}y^3 \right]_0^1 = -\frac{19}{12}.
 \end{aligned}$$

3.5.3 Teorema de Stokes

Vimos, com o Teorema de Green, que existe uma relação muito forte entre o integral de um campo vectorial ao longo de uma curva de Jordan e o duplo integral, no interior dessa curva, do seu rotacional escalar. O Teorema de Stokes generaliza de certa forma esta propriedade a superfícies de \mathbb{R}^3 .

Seja \mathcal{S} uma superfície cujo bordo é uma linha \mathcal{C} . Como é sabido, existem duas orientações possíveis para \mathcal{C} e duas orientações possíveis para os vectores unitários normais a \mathcal{S} . Diremos que \mathcal{C} é orientada de acordo com \mathcal{S} se estas duas orientações se relacionarem de acordo com a regra do “saca-rolhas” ou da “mão direita”:



Nesta situação temos o Teorema de Stokes:

Teorema 3.5.19 (Teorema de Stokes) *Seja \mathcal{S} uma superfície orientada, de bordo \mathcal{C} orientado de acordo com \mathcal{S} . Então, para todo campo vectorial \mathcal{F} de classe C^1 definido num aberto Ω que contenha \mathcal{S} ,*

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

EXEMPLO: Calcule, utilizando o Teorema de Stokes, a circulação $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ em que $\mathbf{F} = (y^2, x^2, z^2)$ e \mathcal{C} é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 1$ orientado de forma a que a sua projecção no plano $z = 0$ esteja orientado no sentido directo.

Consideremos \mathcal{S} a superfície de forma elíptica contida no plano $y + z = 1$ e de bordo \mathcal{C} orientada “para cima” (pela regra do “saca-rolhas” está orientada de acordo com a orientação de \mathcal{C}).

Pelo Teorema de Stokes, tem-se:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Note-se que no Teorema de Stokes podemos utilizar qualquer superfície de bordo \mathcal{C} ; no entanto, aquela que escolhermos simplifica os cálculos.

Tem-se que:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = (0, 0, 2x - 2y)$$

e se considerarmos que o plano $y + z = 1$ é parametrizado por:

$$\phi(x, y) = (x, y, 1 - y)$$

com $(x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, então um vector normal ao plano no ponto $(x, y, 1 - y)$ é dado por:

$$T_x \times T_y = (1, 0, 0) \times (0, 1, -1) = (0, 1, 1)$$

dado que esse vector tem cota positiva ele corresponde à orientação de \mathcal{S} , logo:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_D (0, 0, 2x - 2y) \cdot (0, 1, 1) dA = \iint_D (2x - 2y) dA = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(\cos(\theta) + \sin(\theta)) r dr d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) d\theta = 0 \end{aligned}$$

3.5.4 Teorema de Gauss

Consideremos agora uma superfície fechada (isto é, sem bordo). Aplicando o Teorema de Stokes, temos que para qualquer campo \mathbf{F} definido em \mathcal{S} ,

$$\oiint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\emptyset} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Ou seja, o fluxo de um rotacional através de uma superfície fechada é nulo.

Vamos apresentar um último teorema que liga o fluxo de um campo através de uma superfície fechada a um integral de volume:

Teorema 3.5.20 (Teorema de Gauss (ou da divergência)) *Seja \mathcal{S} uma superfície fechada, orientada para o exterior e \mathcal{F} um campo vectorial de classe C^1 definido em \mathcal{S} e no interior de \mathcal{S} . Então,*

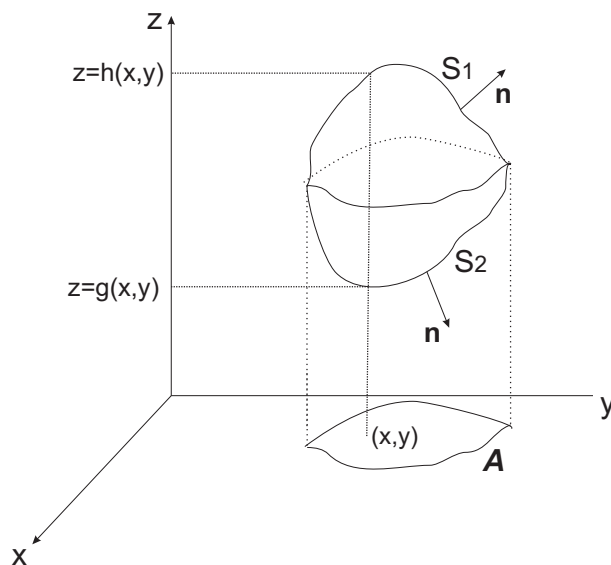
$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_{S_{int}} \text{div}(\mathbf{F}) dV.$$

Demonstração: Vamos provar o Teorema de Gauss no caso em que S_{int} é um sólido de tipo I, da forma:

$$S_{int} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \wedge g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}.$$

Consideremos as superfícies S_1 e S_2 parametrizadas respectivamente por

$$\phi_1 : (u, v) \in A \rightarrow (u, v, h(u, v)) \quad \text{e} \quad \phi_2 : (u, v) \in A \rightarrow (u, v, g(u, v)) :$$



Seja $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$ um campo de classe C^1 . Definimos os campos $\mathbf{F}_1 = (f_1, 0, 0)$, $\mathbf{F}_2 = (0, f_2, 0)$ e $\mathbf{F}_3 = (0, 0, f_3)$. O Teorema de Gauss resulta do facto de:

$$\iint_S \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \frac{\partial f_1}{\partial x} dV,$$

$$\iint_S \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \frac{\partial f_2}{\partial y} dV,$$

$$\iint_S \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \frac{\partial f_3}{\partial z} dV :$$

somando estas três identidades obtém-se o resultado.

Provamos apenas a última destas fórmulas: Temos

$$\iint_S \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n} dS.$$

Em S_1 , com as notações habituais,

$$\|T_x \times T_y\| \mathbf{n} = T_x \times T_y = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial x}, 1\right)$$

pelo que

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n} dS = \iint_A [0, 0, f_3(x, y, h(x, y))] \cdot \left[-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial x}, 1\right] dA = \iint_A f_3(x, y, h(x, y)) dA.$$

Da mesma forma, em S_2 ,

$$\|T_x \times T_y\| \mathbf{n} = -T_x \times T_y = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}, -1\right) :$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n} dS = \iint_A [0, 0, f_3(x, y, g(x, y))] \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}, -1\right] dA = -\iint_A f_3(x, y, g(x, y)) dA.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{S_1} \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_A f_3(x, y, h(x, y)) dA - \iint_A f_3(x, y, g(x, y)) dA \\ &= \iint_A [f_3(x, y, h(x, y)) - f_3(x, y, g(x, y))] dA = \iiint_{S_{int}} \frac{\partial f_3}{\partial z} dV.\end{aligned}$$

EXEMPLO: Calcule, utilizando o Teorema de Gauss, o fluxo $\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ com $\mathbf{F} = (x, zx, y^2x^3)$ e S a superfície do sólido limitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano $z = 0$ orientada positivamente.

Tem-se:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 1,$$

logo pelo Teorema de Gauss:

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{S_{int}} dV = \iint_D \int_0^{4-x^2-y^2} dz dA$$

com $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, utilizando coordenadas polares tem-se:

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^2 (4 - r^2) r dr = \frac{32\pi}{3}.$$

Note que o cálculo directo do fluxo é bastante mais complicado.

3.6 Exercícios Propostos

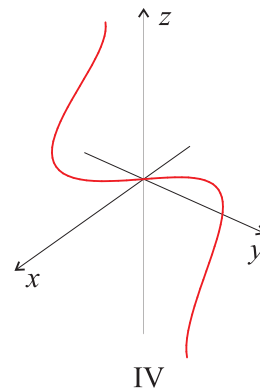
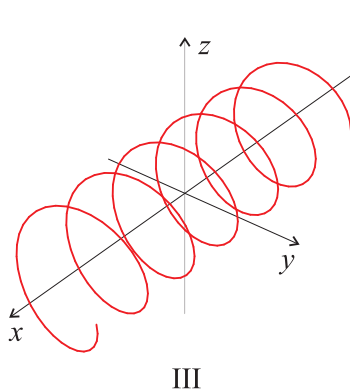
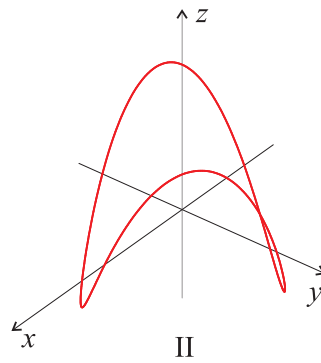
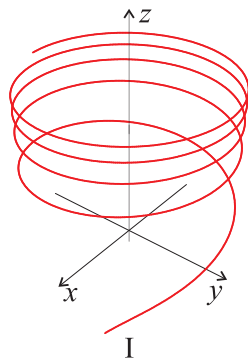
3.6.1 Linhas em \mathbb{R}^n . Coordenadas polares.

1. Esboce as curvas de representação paramétrica:

- (a) $(\sin(t), 3\cos(t)), t \in [0, 2\pi]$;
- (b) $(t+2, t, 2t+1), t \in [0, 1]$;
- (c) $(t-2, t^2+1), t \in [-1, 2]$;
- (d) $(t+1, 2t-1, 3t), t \in [-4, 4]$;
- (e) $(4\cos(2t), 2\sin(2t)), t \in [0, \pi]$;
- (f) $(1+\cos(t), 2+\sin(t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Faça corresponder a cada um dos gráficos a respectiva representação paramétrica:

- (a) $\phi(t) = (\frac{t}{2}, \cos(3t), \sin(t))$;
- (b) $\phi(t) = (\sin(\pi t), -t, t)$;
- (c) $\phi(t) = (\cos(t), \cos(t), \log(t))$;
- (d) $\phi(t) = (\sin(t), \cos(t), \sin(t^2))$.



3. Calcule o vector velocidade e a equação da recta tangente, num ponto $\phi(t_0)$, para cada uma das seguintes curvas:

- (a) $\phi(t) = (2(t - \text{sen}(t)), 2(1 - \text{cos}(t))), t \in [0, 2\pi]$;
- (b) $\phi(t) = (\text{cos}(2\pi t), \text{sen}(2\pi t), \text{sen}(4\pi t)), t \in [0, 1]$;
- (c) $\phi(t) = (\text{cos}(t), \text{sen}(t), t), t \in [0, \pi]$;
- (d) $\phi(t) = (\text{cos}^3(t), \text{sen}^3(t)), t \in [0, 2\pi]$;
- (e) $\phi(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t}), t \in [0, 4]$.

4. Calcule o comprimento das curvas com as seguintes parametrizações:

- (a) $\phi(t) = (1, t, t^2), t \in [0, 1]$;
- (b) $\phi(t) = (t, t \text{sen}(t), t \text{cos}(t)), t \in [0, \pi]$;
- (c) $\phi(t) = \begin{cases} (2 \text{cos}(t), t, 2 \text{sen}(t)), & \text{se } t \in [0, 2\pi] \\ (2, t, t - 2\pi), & \text{se } t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$
- (d) $\phi(t) = (2t^{3/2}, 4t), t \in [0, 1]$;
- (e) $\phi(t) = (\text{cos}(t) + t \text{sen}(t), \text{sen}(t) - t \text{cos}(t), \frac{\sqrt{3}}{2}t^2), t \in [0, 2\pi]$;
- (f) $(\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \sqrt{2}t), t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$;
- (g) $(\text{arcsen}(t), \frac{1}{2} \log(1-t^2)), t \in [0, \frac{1}{2}]$;
- (h) $\phi(t) = (\log(t), 2t, t^2), t \in [1, e]$.

5. Reparametrize as seguintes curvas com a abcissa curvilínea

- (a) $\phi(t) = (2t, 1 - 3t, 5 + 4t)$;
- (b) $\phi(t) = (e^{2t} \text{cos}(2t), 2, e^{2t})$.

6. Calcule o comprimento dos gráficos das seguintes funções reais de variável real:

- (a) $f(x) = \log(x^2 - 1), x \in [2, 5]$;
- (b) $f(x) = x^4 + \frac{1}{32x^2}, x \in [1, 2]$;
- (c) $f(x) = \text{tg}(x) - \frac{1}{8}(x + \frac{1}{2}\text{sen}(x)), x \in [0, \frac{\pi}{4}]$;
- (d) $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}(x - 3), x \in [0, 3]$;
- (e) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log(x), x \in [1, 5]$;
- (f) $f(x) = \log(\text{sen}(x)), x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$;
- (g) $f(x) = 3x^{\frac{3}{2}} - 1, x \in [0, 1]$;
- (h) $f(x) = \frac{x^6 + 8}{16x^2}, x \in [2, 3]$.

7. Escreva a equação cartesiana das seguintes curvas em coordenadas polares:

- (a) $r = 3$;
- (b) $r = 2 \text{cos}(\theta)$;

- (c) $r \operatorname{sen}(\theta) = 9$;
 (d) $r = \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta)$;
 (e) $r = \frac{4}{\cos(\theta) + 2 \operatorname{sen}(\theta)}$.

8. Escreva a equação polar das seguintes curvas em coordenadas cartesianas:

- (a) $x = 9$;
 (b) $(x - 2)^2 + y^2 = 16$;
 (c) $x^2 + y^2 + 4x = 0$;
 (d) $y = -2$;
 (e) $x^2(x^2 + y^2) = y^2$.

9. Calcule o comprimento das seguintes curvas em coordenadas polares:

- (a) $r = e^{2\theta}$, $\theta \in [0, 2]$;
 (b) $r = 4$, $\theta \in [0, 2\pi]$;
 (c) $r = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\theta \in [0, \pi]$;
 (d) $r = 4\sqrt{\cos(2\theta)}$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$;
 (e) $r = \sqrt{\theta}$, $\theta \in [0, 10\pi]$.

3.6.2 Integrais de linha.

1. Calcule $\int_{(\mathcal{C}, \phi)} f \, ds$ sendo:

- (a) $f(x, y, z) = 2x + 3y + z$, $\phi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 2)$;
 (b) $f(x, y, z) = x + 3y^2 + xz$, $\phi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(t) = (1 - \cos(t), 1 - \operatorname{sen}(t), t)$;
 (c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^3}$, $\phi: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(t) = (t, \log(t), 4)$;
 (d) $f(x, y, z) = xyz$, $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(t) = (1, t^2, 2)$;
 (e) $f(x, y, z) = 2 \cos(x) + 3y + \log(z)$, $\phi: [e, e^2] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(t) = (t, 2t, 3t)$;
 (f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\phi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$.

2. Utilizando integrais de linha calcule a área de cada uma das seguintes superfícies:

- (a) Superfície limitada pela linha \mathcal{C} parametrizada por $\phi(t) = (30 \cos^3(t), 30 \operatorname{sen}^3(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, e o gráfico de $f(x, y) = 1 + \frac{y}{2}$.
 (b) Superfície cilíndrica de equação $x^2 + y^2 = 1$ limitada inferiormente pelo plano $z = 0$ e superiormente pelo plano $z = x + 3y + 10$.
 (c) Superfície limitada pelo triângulo de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ no plano xy e a função $z = 6$.

3.6.3 Campos vectoriais.

1. Calcule a divergência dos seguintes campos vectoriais:

- (a) $F(x, y) = (xy^2, e^{x^2+y^2})$;
- (b) $F(x, y) = (\cos(x+y), \text{sen}(\pi xy))$;
- (c) $F(x, y, z) = (y, x, z)$;
- (d) $F(x, y, z) = (xy, xz, z^2)$;
- (e) $F(x, y, z) = (x + \cos(y), z \text{sen}(x), x^2 yz)$;
- (f) $F(x, y, z) = (e^{x^2 yz}, e^{xy^2 z}, e^{xyz^2})$.

2. Calcule o rotacional dos seguintes campos vectoriais:

- (a) $F(x, y, z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$;
- (b) $F(x, y, z) = (\text{sen}(x), z \cos(y), 3z)$;
- (c) $F(x, y, z) = (\cos(2xy), 3x + 2z + y, yz^2)$;
- (d) $F(x, y, z) = (x, y, z)$;
- (e) $F(x, y, z) = (-x - z, yx, -z)$;
- (f) $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$.

3. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1 e $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Prove que

- (a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;
- (b) $\nabla(cf) = c \nabla f$;
- (c) $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$;
- (d) $\nabla(f/g) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}, \forall x \in A : g(x) \neq 0$.

4. Sejam $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas funções de classe C^1 e $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Prove que

- (a) $\text{div}(F + G) = \text{div}(F) + \text{div}(G)$;
- (b) $\text{div}(cF) = c \text{div}(F)$.

5. Sejam $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1 . Prove que $\text{div}(fF) = f \text{div}(F) + F \cdot \nabla f$.

6. Sejam $F : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $G : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas funções de classe C^1 e $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Prove que

- (a) $\text{rot}(F + G) = \text{rot}(F) + \text{rot}(G)$;
- (b) $\text{rot}(cF) = c \text{rot}(F)$;
- (c) $\text{div}(F \times G) = G \cdot \text{rot}(F) - F \cdot \text{rot}(G)$.

7. Sejam $F : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1 . Prove que $\text{rot}(fF) = f \text{rot}(F) - F \times \nabla f$.
8. Seja $F : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^2 . Prove que $\text{div}(\text{rot}(F)) = 0$.
9. Calcule o integral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds$, onde \mathbf{F} é o campo vectorial indicado e \mathcal{C} é a linha parametrizada por ϕ :
- $F(x, y) = (xy, 3x)$, $\phi(t) = (t^2, t)$, $0 \leq t \leq 2$;
 - $F(x, y) = (3x - 2y, 4x^y)$, $\phi(t) = (t^3, t)$, $-2 \leq t \leq 2$;
 - $F(x, y, z) = (xyz, 3xy^2, 4z)$, $\phi(t) = (3t, t^2, 4t^3)$, $0 \leq t \leq 4$;
 - $F(x, y, z) = (z, -y, -x)$, $\phi(t) = (5, -\text{sen}(t), -\text{cos}(t))$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$;
 - $F(x, y, z) = (5e^{\text{sen}(\pi x)}, -4e^{\text{cos}(\pi x)}, 0)$, $\phi(t) = (\frac{1}{2}, 2, \log(\frac{e^t + e^{-t}}{2}))$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$.
10. Seja \mathcal{C} a elipse em \mathbb{R}^2 de equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ orientada no sentido directo. Calcule $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds$, $F(x, y) = (3y, 4x)$.
11. Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $F(x, y, z) = (3x^2y, x^3 + y^3, 0)$.
- Verifique que $\text{rot}(F) = 0$.
 - Determine uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$.
12. Verifique se os seguintes campos vectoriais são conservativos e, em caso afirmativo, calcule o potencial:
- $F(x, y) = (4x, 2y)$;
 - $F(x, y, z) = (2xye^z, e^z x^2, x^2 ye^z + z^2)$;
 - $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$;
 - $F(x, y) = (2x \text{sen}(y) + 4e^x, \text{cos}(y))$;
 - $F(x, y) = (5y^3 + 4y^3 \sec^2(x), 15xy^2 + 12y^2 \text{tg}(x))$;
 - $F(x, y, z) = (yze^{xy}, xze^{xy}, e^{xy} + \text{cos}(z))$;
 - $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$;
 - $F(x, y) = (e^y, xe^y + y)$;
 - $F(x, y) = (3x^2 + 2y^2, 4xy + 6y^2)$.
13. Calcule os seguintes integrais onde \mathcal{C} é a linha parametrizada por ϕ :
- $\int_{\mathcal{C}} e^x dx + xydy + xyzdz$, $\phi(t) = (t, t, 2t)$, $-1 \leq t \leq 1$;
 - $\int_{\mathcal{C}} y(x^2 + y^2)dx - x(x^2 + y^2)dy + xydz$, $\phi(t) = (\text{cos}(t), \text{sen}(t), t)$, $-\pi \leq t \leq \pi$;
 - $\int_{\mathcal{C}} y \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{1+y^2} dy$, $\phi(t) = (\text{cos}(t), \text{sen}(t))$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

14. Seja \mathcal{C} a hélice em \mathbb{R}^3 parametrizada por $\phi(t) = (\cos(2t), \sin(2t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcule os seguintes integrais

(a) $\int_{\mathcal{C}} 3x dx + 4y dy + z dz;$

(b) $\int_{\mathcal{C}} yz dx + xz dy + xy dz.$

15. Seja \mathcal{C} o rectângulo em \mathbb{R}^2 de vértices $(-1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 3)$ e $(-1, 3)$ orientado no sentido directo. Calcule os seguintes integrais

(a) $\int_{\mathcal{C}} x^2 y dx + (4y + x) dy;$

(b) $\int_{\mathcal{C}} y^2 dx + x^2 dy.$

16. Mostre que $\int_{\mathcal{C}} (e^{3y} - y^2 \sin(x)) dx + (3xe^{3y} + 2y \cos(x)) dy$ é independente do caminho numa região simplesmente conexa.

17. Seja $F(x, y) = (2x + y^3, 3xy^2 + 4)$. Mostre que $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds$ é independente do caminho numa região simplesmente conexa e calcule a sua função potencial.

18. Seja $F(x, y, z) = (y^2 \cos(x), 2y \sin(x) + e^{2x}, 2ye^{2z})$. Mostre que $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds$ é independente do caminho numa região simplesmente conexa e calcule a sua função potencial.

3.6.4 Teorema de Green

1. Verifique o Teorema de Green em cada um dos casos seguintes:

(a) $f(x, y) = xy^2$, $g(x, y) = -yx^2$ e $\mathcal{C}_{int} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(b) $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = y$ e \mathcal{C} é a circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio 1;

(c) $f(x, y) = y - \sin(x)$, $g(x, y) = \cos(x)$ e \mathcal{C}_{int} é a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

(d) $f(x, y) = 2x^3 - y^3$, $g(x, y) = x^3 + y^3$ e \mathcal{C} é a circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio 1.

2. Seja R o rectângulo em \mathbb{R}^2 de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$ e $(0, 2)$, com a fronteira orientada no sentido directo. Utilizando o Teorema de Green calcule os integrais

(a) $\int_{fr(R)} 2xy dx + 3x^2 dy;$

(b) $\int_{fr(R)} 2x^2 y dx + 3xy^2 dy;$

(c) $\int_{fr(R)} y dx + x dy.$

3. Seja R o triângulo em \mathbb{R}^2 de vértices $(0,0)$, $(4,0)$ e $(0,4)$, com a fronteira orientada no sentido directo. Utilizando o Teorema de Green calcule os integrais

(a) $\int_{fr(R)} 2xy^2 dx + 4x dy;$

(b) $\int_{fr(R)} y dx + x dy;$

(c) $\int_{fr(R)} y dx - x dy.$

4. Utilizando o Teorema de Green calcule os seguintes integrais

(a) $\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$ onde C é a linha que une os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ ao longo da linha $y = x^2$ e de $(1,1)$ a $(0,0)$ ao longo do gráfico de $y = x$;

(b) $\int_C 2\arctg\left(\frac{y}{x}\right) dx + \log(x^2 + y^2) dy$ onde C é a linha de equações paramétricas $x = 4 + 2\cos(\theta)$, $y = 4 + \sin(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$;

(c) $\int_C e^x \sin(2y) dx + 2e^x \cos(2y) dy$ onde C é a linha definida por $x^2 + y^2 = 1$;

(d) $\int_C y^2 dx + xy dy$ onde C é a fronteira do conjunto limitado por $y = 0$, $y = \sqrt{x}$ e $x = 4$.

5. Utilizando o Teorema de Green calcule a área da região D delimitada pela curva

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

$a > 0$. Pode usar a seguinte parametrização: $\phi(t) = (a \cos^3(t), a \sin^3(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Utilizando o Teorema de Green calcule a área dos seguintes conjuntos:

(a) Conjunto limitado inferiormente por $y = 0$ e superiormente pela cicloide parametrizada por $\phi(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

(b) Conjunto limitado pela curva parametrizada por $\phi(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

(c) Conjunto limitado por $x = 0$, $y = \frac{1}{4}$ e a curva parametrizada por $\phi(t) = (\sin(\pi t), t(1-t))$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$;

(d) Conjunto limitado pela curva parametrizada por $\phi(t) = (2\cos(t) - \sin(2t), 2\sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

(e) Pentágono de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(0,2)$ e $(-1,1)$.

3.6.5 Integrais de superfície

1. Parametrize e represente geometricamente as seguintes superfícies:

(a) $y = z^2$;

(b) $x + 2y - z = 2$;

(c) $x^2 + y^2 = z^2$;

(d) $x^2 + y^2 = z$.

2. Calcule, para cada uma das superfícies paramétricas indicadas, um vector unitário ortogonal à superfície no ponto $\phi(u, v)$:

(a) $\phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (3 \operatorname{sen}(u) \cos(v), 2 \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v), \cos(u))$;

(b) $\phi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (\operatorname{sen}(v), u, \cos(v))$;

(c) $\phi : [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = ((2 - \cos(u))\operatorname{sen}(v), (2 - \cos(u)) \cos(v), \operatorname{sen}(u))$;

(d) $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u, v, v)$.

3. Calcule, para cada uma das superfícies paramétricas indicadas, a equação do plano tangente à superfície no ponto $\phi(u_0, v_0) = \phi(0, 1)$:

(a) $\phi : [-1, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u^2 + v, v^2, 2u)$;

(b) $\phi : [-1, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u^2 - v^2, u + v, u^2 + 6v)$;

(c) $\phi : [0, 2] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u^2 \cos(v), u^2 \operatorname{sen}(v), u)$.

4. Calcule o integral de superfície $\iint_S g(x, y, z) dS$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $g(x, y, z) = x$, S é a porção do plano de equação $6x + 4y + 3z = 12$ no primeiro octante;

(b) $g(x, y, z) = z^2$, S é o cone de equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre $z = 1$ e $z = 3$;

(c) $g(x, y, z) = z^2$, S é a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no primeiro octante;

(d) $g(x, y, z) = xy$, S é o parabolóide de equação $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z \geq 0$;

(e) $g(x, y, z) = x^2z$, S é o cilindro de equação $x^2 + z^2 = 1$ entre $y = -1$ e $y = 2$ e $z \geq 0$;

(f) $g(x, y, z) = x^2 + y^2$, S é o parabolóide de equação $z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano xy e a porção do plano que é interior ao círculo $x^2 + y^2 = 1$;

(g) $g(x, y, z) = 2x^2 + 1$, S é a superfície de equação $z = 3x - 2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

5. Calcule o integral de superfície $\iint_S g(x, y, z) dS$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $g(x, y, z) = yz$, S é a superfície parametrizada por $\phi : [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u^2, u \operatorname{sen}(v), u \cos(v))$;

(b) $g(x, y, z) = y$, S é a superfície parametrizada por $\phi : [0, 8] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (\sqrt{5} \cos(v), \sqrt{5} \operatorname{sen}(v), u)$;

(c) $g(x, y, z) = x + z$, S é a superfície parametrizada por $\phi : [0, 4] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(x, \theta) = (x, 3 \cos(\theta), 3 \operatorname{sen}(\theta))$;

(d) $g(x, y, z) = y + 5$, S é a superfície parametrizada por $\phi : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u, v, \frac{v}{2})$;

(e) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, S é a superfície parametrizada por $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u + v, u, v)$.

6. Calcule a área das seguintes superfícies:

- (a) Porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2x$;
- (b) Porção do plano $x + y + 2z = 4$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4$;
- (c) Porção do cone de equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre $z = 0$ e $z = 3$.

7. Calcule a área das superfícies cuja parametrização é dada por:

- (a) $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (2uv, u^2, 2v^2)$;
- (b) $\phi : [0, 2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (2u, -\frac{v}{2}, \frac{v}{2})$;
- (c) $\phi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = ((9+2\cos(v))\cos(u), (9+2\cos(v))\sin(u), 2\sin(v))$;
- (d) $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u + v, u - v, 2u)$.

8. Considere o parabolóide parametrizado por $\phi : [0, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\phi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2).$$

- (a) Escreva a equação cartesiana da superfície.
- (b) Calcule um vector unitário ortogonal à superfície num ponto $\phi(u, v)$.
- (c) Calcule a área da superfície.

9. Calcule o integral de superfície $\iint_S g(x, y, z) d\mathbf{S}$ em cada um dos seguintes casos:

- (a) $g(x, y, z) = (x, y, z)$, S é a superfície parametrizada por $\phi : [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u^2, u \sin(v), u \cos(v))$;
- (b) $g(x, y, z) = (x, y, z)$, S é a superfície parametrizada por $\phi : [0, 8] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (\sqrt{5} \cos(v), \sqrt{5} \sin(v), u)$;
- (c) $g(x, y, z) = (x^2, 0, z)$, S é a superfície parametrizada por $\phi : [0, 4] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(x, \theta) = (x, 3 \cos(\theta), 3 \sin(\theta))$;
- (d) $g(x, y, z) = (x + y, z^2, y^2)$, S é a superfície parametrizada por $\phi : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u, v, \frac{v}{2})$;
- (e) $g(x, y, z) = (x, x + y + z, x^2)$, S é a superfície parametrizada por $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u + v, u, v)$.

10. Calcule o integral de superfície $\iint_S g(x, y, z) d\mathbf{S}$ em cada um dos seguintes casos:

- (a) $g(x, y, z) = (x, y, z)$, S é a semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$;
- (b) $g(x, y, z) = (x, y, z)$, S é a porção do plano $3x + 2y + z = 12$ limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ e $y = 2$;
- (c) $g(x, y, z) = (2, 5, 3)$, S é a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Índice Remissivo

- campo vectorial, 85
- campo conservativo, 90
- campo de gradientes, 90
- campo vectorial fechado, 87
- Cavalieri, 11
- ciclóide, 68
- comprimento de linha, 73
- conexo por arcos, 93
- conjuntos básicos, 17, 45
 - tipo I, 45
 - tipo II, 48
 - tipo III, 49
- coordenadas cilíndricas, 54
- coordenadas esféricas, 59
- coordenadas polares, 27
- curva, 65
- curva de Jordan, 69
- curva fechada, 68
- curva regular, 70
- curva seccionalmente regular, 70

- divergência, 85

- fluxo, 115
- forma diferencial, 96
- forma diferencial fechada, 97
- forma exacta, 97
- função
 - integrável, 2

- horizontalmente simples, 19

- independente do caminho, 93
- integração parcial, 9
- integrais iterados, 10
- integral, 2
 - inferior, 2
 - superior, 2
- integral curvilíneo, 81

- linha, 65

- Método da Secção, 11
- mudança de variáveis, 25
- mudança de variável, 53

- ordem de integração, 43

- paralelepípedo, 39
- parametrização inversa, 71
- partição, 1, 5, 40
- ponto estacionário, 70
- ponto múltiplo, 65
- ponto regular, 70

- rectângulo, 4
- reparametrização, 72
- representação paramétrica, 65
- rotacional, 86

- sólido de revolução, 12
- simplesmente conexo, 95
- soma inferior de Darboux, 1, 5, 40
- soma superior de Darboux, 2, 5, 40
- superfície, 103
- superfície orientável, 116

- Teorema da Média, 25
- Teorema de Fubini, 13, 42
- Teorema de Green, 99
- Teorema de Jordan, 98

- vector velocidade, 69
- verticalmente simples, 17