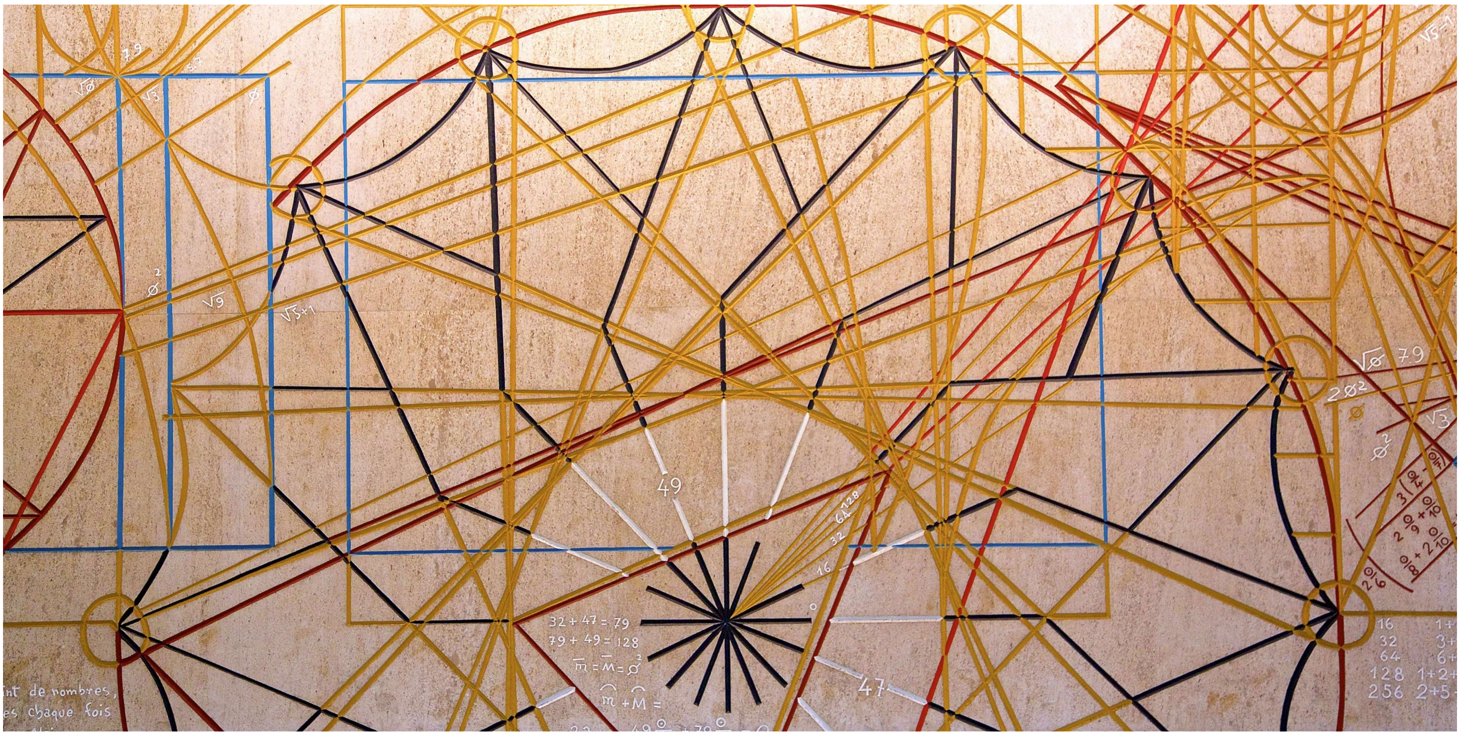


4. Sucessões Numéricas

4.1 Generalidades

Intuitivamente, uma sucessão numérica é uma lista ordenada infinita de números reais:

$$3, -\frac{1}{2}, \pi, 5, \sqrt{2}, \dots$$

A forma correta de formalizar matematicamente esta ideia é a de considerar que uma sucessão é uma função de domínio $\mathbb{N}$ que a cada número natural n faz corresponder o n-ésimo número da lista:

Definição 4.1.1: Sucessão numérica

A toda a função

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

de domínio $\mathbb{N}$ dá-se o nome de «sucessão numérica».

Tradicionalmente, a imagem de um dado número natural n, $u(n)$, representa-se por «u_n», a que se dá o nome de «n-ésimo termo da sucessão». Por esta razão, a sucessão u representa-se frequentemente por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou mais simplesmente por (u_n).
Uma sucessão fica totalmente determinada pelo dado de u_n para todo o n, designando-se neste contexto «u_n» por «termo geral da sucessão». Por exemplo, a sucessão de termo geral

$$u_n = 2n$$

designa a função

$$\begin{array}{llll} u: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \hookrightarrow & u(n) = 2n, \end{array}$$

e corresponde à lista infinita

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

dos números pares.
Como para qualquer função, uma sucessão diz-se crescente (respetivamente decrescente) se para todo o $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m \Rightarrow u_n > u_m$ (respetivamente $u_n < u_m$), ou seja, a objetos maiores correspondem imagens maiores (respetivamente menores). No caso das sucessões, é fácil observar que esta propriedade é equivalente a todos os termos serem maiores (respetivamente menores) do que o respetivo antecessor:

Definição 4.1.2: Monotonia

A sucessão (u_n) diz-se «crescente» se, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

e «decrescente» se, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n < 0.$$

Substituindo-se respetivamente nestas definições as desigualdades estritas $>$ e $<$ por $\geq$ e $\leq$, diz-se que (u_n) é «crescente (respetivamente decrescente) no sentido lato».

Exemplo 4.1.1 Estudemos a monotonia da sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n-2}{n+3}$.

Tem-se

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)-2}{(n+1)+3} - \frac{n-2}{n+3} = \frac{(n-1)(n+3)-(n-2)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{5}{(n+3)(n+4)} > 0$$

pelo que a sucessão (u_n) é crescente.

Definição 4.1.3: Sucessão Majorada/Minorada

Seja (u_n) uma sucessão. Se existir $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq M,$$

(u_n) diz-se «majorada» e M um «majorante» de (u_n).
Se existir $m \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq m,$$

(u_n) diz-se «minorada» e m um «minorante» de (u_n).
Se (u_n) for simultaneamente majorada e minorada diz-se «limitada».

Exemplo 4.1.2 Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{4n+2}{2n+5}$.

Para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2 \times (2n+5) - 8}{2n+5} = 2 - \frac{8}{2n+5}.$$

Por outro lado, $2n+5 \geq 7$ pelo que $0 < \dfrac{1}{2n+5} \leq \dfrac{1}{7}$ e $-\dfrac{8}{7} \leq -\dfrac{8}{2n+5} < 0$. Adicionando 2 a estas desigualdades vem

$$2 - \frac{8}{7} \leq u_n < 2,$$

pelo que (u_n) é limitada, sendo $m = \frac{6}{7}$ um minorante de (u_n) e $M = 2$ um majorante.

Observação 4.1.1 Note-se que

$$(u_n) \text{ limitada} \Leftrightarrow \text{ Existe } C \geq 0 \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq C.$$

De facto, uma tal sucessão é minorada por $-C$ e majorada por C. Inversamente, se (u_n) for limitada e admitir o minorante m e o majorante M, basta tomar $C = \max\{|m|;|M|\}$, já que $-C \leq m$ e $C \geq M$.

Dada uma sucessão majorada (u_n), o conjunto imagem

$$U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$$

é majorado (e não vazio). Assim, pelo axioma do supremo, existe $\sup U$, o menor majorante de (u_n). Da mesma forma, se (u_n) for minorada, admite o maior minorante $\inf U$. É usual utilizar-se a seguinte nomenclatura:

Definição 4.1.4: Supremo e ínfimo de uma sucessão

Seja (u_n) uma sucessão majorada. O supremo do conjunto $U = \left\{u_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ designa-se por «supremo de u_n» e denota-se por «$\sup\ u_n$» (o menor majorante da sucessão (u_n)).
Da mesma forma, se (u_n) for minorada, o maior minorante de (u_n), «$\inf u_n$», diz-se o «ínfimo de u_n» (o maior minorante da sucessão (u_n)).

4.2 Limite de uma sucessão

A noção de limite constitui o conceito-chave da Análise Matemática. Tomemos a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$:

$$u_1 = \frac{1}{1}, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = \frac{1}{3}, \quad u_4 = \frac{1}{4}, \quad u_5 = \frac{1}{5} \ldots$$

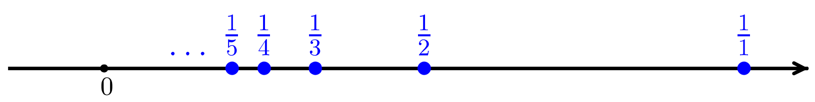


Figura 4.1: Primeiros termos da sucessão $u_n = \frac{1}{n}$

Ficamos com uma certa ideia intuitiva de que os termos desta sucessão "se aproximam indefinidamente" do "valor limite 0"...Como dar corpo a esta mesma ideia? Se tomarmos uma qualquer vizinhança de 0, da forma $\mathscr{V}_\varepsilon(0) =]-\varepsilon;\varepsilon[$ parece claro que a partir de uma certa ordem todos os termos da sucessão pertencem a $\mathscr{V}_\varepsilon(0)$. De facto,

$$u_n \in I_\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Assim, para $n \geq p = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, tem-se $u_n \in \mathscr{V}_\varepsilon(0)$, isto é, $|u_n - 0| < \varepsilon$.

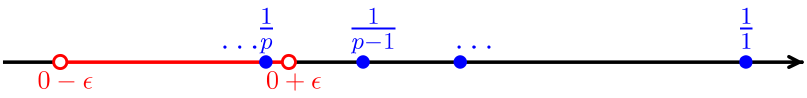


Figura 4.2: Para $n \geq p$, $u_n \in I_\varepsilon$

Esta observação está na base da definição de limite:

Definição 4.2.1: Limite (finito) de uma sucessão

Seja (u_n) uma sucessão e $L \in \mathbb{R}$.
Se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon,$$

diz-se que «u_n tende para L quando n tende para $+\infty$». A sucessão (u_n) diz-se então «convergente» e o número real L o «limite da sucessão (u_n)», denotando-se este facto por

$$\lim u_n = L \text{ ou por } u_n \to L$$

Se a sucessão (u_n) não admitir limite dir-se-á «divergente».

Proposição 4.2.1 Toda a sucessão convergente é limitada.

Demonstração. Seja (u_n) uma sucessão convergente e L o respetivo limite. Tomando, na definição de limite, $\varepsilon = 1$, tem-se a existência de uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$,

$$L - 1 < u_n < L + 1.$$

O conjunto

$$\{L-1\} \cup \{L+1\} \cup \{u_n : 1 \leq n \leq p-1\},$$

sendo finito, admite mínimo m e máximo M, que são respetivamente um minorante e um majorante de (u_n). ■

A seguinte proposição estabelece a unicidade do limite:

Proposição 4.2.2 Seja (u_n) uma sucessão convergente. Então, o limite de (u_n) é único.

A prova deste resultado é deixado em exercício (ver Exercício 4.5.10).

Tomemos agora o exemplo da sucessão de termo geral $u_n = n^2$: $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$. Para qualquer número real $M > 0$ que se escolha, a partir de certa ordem ter-se-á $n^2 \geq M$. Com efeito, tomando $M = 500$, tem-se $u_n = n^2 \geq 500$ se $n \geq \sqrt{500} \approx 22,36$, ou seja, para $n \geq 23$. De maneira mais geral, $u_n \geq M$ se $n \geq \lceil \sqrt{M} \rceil$.

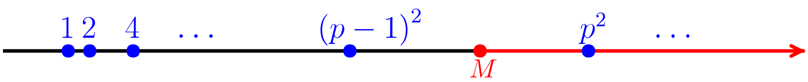


Figura 4.3: Para $n \geq p$, $u_n \geq M$

As sucessões que exibem esta propriedade de se tornarem, a partir de certa ordem, "tão grandes quanto se queira"
dizem-se de limite $+\infty$:

Definição 4.2.2: Limite $+\infty$

Seja (u_n) uma sucessão.
Se
$$\forall M > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow u_n \geq M,$$
diz-se que «u_n tende para $+\infty$ quando n tende para $+\infty$», denotando-se
$$\lim u_n = +\infty \text{ ou } u_n \to +\infty.$$

Define-se, de forma análoga, o limite $-\infty$:

Definição 4.2.3: Limite $-\infty$

Seja (u_n) uma sucessão.
Se
$$\forall M > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow u_n \leq -M,$$
diz-se que «u_n tende para $-\infty$ quando n tende para $+\infty$», denotando-se
$$\lim u_n = -\infty\, ou\, u_n \to -\infty.$$

Exemplo 4.2.1 Mostremos que a sucessão de termo geral $u_n = -n^2 + 5$ tende para $-\infty$:
Seja $M > 0$. Tem-se
$$u_n \leq -M \Leftrightarrow -n^2 + 5 \leq -M \Leftrightarrow n^2 \geq M + 5 \Leftrightarrow n \geq \left\lceil \sqrt{M+5} \right\rceil.$$
Assim, por definição,
$$\lim -n^2 + 5 = -\infty.$$

O seguinte resultado garante que toda a sucessão monótona e limitada converge:

Teorema 4.2.1: Sucessões limitadas e monótonas

Seja (u_n) uma sucessão majorada e crescente. Então (u_n) é convergente e $\lim u_n = \sup u_n$.
Da mesma forma, se (u_n) é minorada e decrescente, (u_n) converge para $\inf u_n$.

Demonstração. Seja (u_n) uma sucessão crescente e majorada e $S = \sup u_n$. Para $\varepsilon > 0$, $S - \varepsilon$ não é majorante de (u_n), uma vez que S é por definição o menor majorante e $S - \varepsilon < S$. Assim, existe pelo menos um termo u_p da sucessão tal que $u_p > S - \varepsilon$.
Como (u_n) é crescente, para todo o $n \geq p$, $u_n \geq u_p > S - \varepsilon$. Por outro lado, como S é em particular um majorante de (u_n), $u_n \leq S < S + \varepsilon$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Provámos pois que para $n \geq p$, $S - \varepsilon < u_n < S + \varepsilon$. Por definição de limite, (u_n) converge para S.
A demonstração é análoga no caso de (u_n) ser decrescente e minorada. ■

Exemplo 4.2.2 Explicite o supremo e o ínfimo da sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{4n+1}{2n+7}$.

Efetuando a divisão euclidiana de $4n+1$ por $2n+7$ obtém-se que $u_n = \dfrac{4n+1}{2n+7} = 2 - \dfrac{13}{2n+7}$.
A sucessão é portanto crescente: $\inf u_n = u_1 = \dfrac{2}{9}$. Por outro lado, $\sup u_n = \lim u_n = 2$.

4.3 Álgebra de limites

Consideremos duas sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$ e $\lim v_n = +\infty$. Será possível, apenas com esta informação, determinar o limite da sucessão de termo geral $s_n = u_n + v_n$?
A resposta é afirmativa: tem-se de facto $\lim s_n = +\infty$. Apesar de se tratar de um resultado bastante intuitivo, vamos justificá-lo cuidadosamente.
Comecemos por tomar um número real $M > 0$. Pretendemos exibir uma ordem p tal que

$$n \geq p \Rightarrow s_n \geq M.$$

Como $\lim u_n = L$, existe por exemplo uma ordem $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p_1 \Rightarrow L-1 < u_n < L+1 \quad \text{(tomámos, na Definição 4.2.1, } \varepsilon = 1\text{)}.$$

Por outro lado, como $\lim v_n = +\infty$, existe uma ordem $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p_2 \Rightarrow v_n \geq M-L+1 \text{(tomámos o } M \text{ da definição 4.2.2 igual a } M-L+1\text{)}.$$

Assim, tomando $p = \max\{p_1; p_2\}$ ambas as desigualdades são verdadeiras para $n \geq p$:

$$s_n = u_n + v_n \geq (L-1) + (M-L+1) = M.$$

Tem-se assim $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ sempre que $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$ e $\lim v_n = +\infty$. Este resultado pode ser representado simbolicamente por

$$\ll L + (+\infty) = +\infty \gg.$$

É possível determinar, em muitas outras situações, o limite da soma/diferença/produto/quociente de duas sucessões, conhecidos os limites de cada uma delas. Esses resultados encontram-se sintetizados no teorema seguinte. As justificações são semelhantes à do caso que acabámos de estudar e ficam ao cuidado do leitor.

Teorema 4.3.1: Álgebra de limites de sucessões

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões.

Se $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$ e $\lim v_n = L' \in \mathbb{R}$

- $\lim u_n \pm v_n = L \pm L'$;
- $\lim u_n \times v_n = L \times L'$;
- Se $L' \neq 0$, $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{L'}$;
- Se $L > 0$, $\lim {u_n}^{v_n} = L^{L'}$.

Se $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$ e $\lim v_n = \pm\infty$

- $\lim u_n + v_n = \pm\infty$ $\quad (L + (\pm\infty) = \pm\infty)$;
- $\lim u_n - v_n = \mp\infty$ $\quad (L - (\pm\infty) = \mp\infty)$;
- Se $L > 0$, $\lim u_n \times v_n = \pm\infty$ $\quad (L \times (\pm\infty) = \pm\infty)$;
- Se $L < 0$, $\lim u_n \times v_n = \mp\infty$ $\quad (L \times (\pm\infty) = \mp\infty)$;
- $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ $\quad \left(\dfrac{L}{\pm\infty} = 0\right)$;
- Se $L > 0, L \neq 1, \lim v_n = +\infty$, então $\lim {u_n}^{v_n} = +\infty$;
- Se $L > 0, L \neq 1, \lim v_n = -\infty$, então $\lim {u_n}^{v_n} = 0$.

Se $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = +\infty$

- $\lim u_n + v_n = +\infty$ $\quad ((+\infty) + (+\infty) = +\infty)$;
- $\lim u_n \times v_n = +\infty$ $\quad ((+\infty) \times (+\infty) = +\infty)$.

Se $\lim u_n = -\infty$ e $\lim v_n = -\infty$

- $\lim u_n + v_n = -\infty$ $\quad ((-\infty) + (-\infty) = -\infty)$;
- $\lim u_n \times v_n = +\infty$ $\quad ((-\infty) \times (-\infty) = +\infty)$.

Se $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = -\infty$

- $\lim u_n \times v_n = -\infty$ $\quad ((+\infty) \times (-\infty) = -\infty)$.

Se $\lim u_n = 0$ e, para n suficientemente grande, $u_n > 0$ («$\lim u_n = 0^+$»)

- $\lim \dfrac{1}{u_n} = +\infty$ $\quad \left(\dfrac{1}{0^+} = +\infty\right)$.

Se $\lim u_n = 0$ e, para n suficientemente grande, $u_n < 0$ («$\lim u_n = 0^-$»)

- $\lim \dfrac{1}{u_n} = -\infty$ $\quad \left(\dfrac{1}{0^-} = -\infty\right)$.

Consideremos agora duas sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$. O que se poderá concluir acerca do limite $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$?

Na verdade, estas duas sucessões "produzem efeitos antagónicos" sobre o quociente $\dfrac{u_n}{v_n}$: o facto de se ter $\lim u_n = +\infty$ faz com que $\dfrac{u_n}{v_n}$ tenha tendência a tornar-se grande. Por outro lado, $\lim v_n = +\infty$ vai no sentido de tornar $\dfrac{u_n}{v_n}$ próximo de 0: (u_n) e (v_n) parecem ter objetivos inconciliáveis para $\dfrac{u_n}{v_n}$!

Nestas condições, não se pode afirmar nada, *a priori*, sobre $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$. Vejamos alguns exemplos:

- Se $u_n = n$ e $v_n = n^2$,

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0;$$

- Se $u_n = 2n^4 + 3$ e $v_n = n^2$,

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim 2n^2 + \frac{3}{n^2} = +\infty + \frac{3}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty;$$

- Se $u_n = 3n + 1$ e $v_n = n$,

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim 3 + \frac{1}{n} = 3 + \frac{1}{+\infty} = 3 + 0 = 3;$$

- Se $u_n = (2 + (-1)^n)n$ e $v_n = n$,
comecemos por observar que $2 + (-1)^n$ assume apenas dois valores: 1 para n ímpar e 3 para n par. Assim, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$, o que é suficiente para afirmar que $\lim u_n = +\infty$ (ver Teorema 4.4.1). Contudo,

$$\frac{u_n}{v_n} = 2 + (-1)^n \text{ não tem limite.}$$

(ver Proposição 4.5.4).

É comum designar-se na literatura este tipo de situação por «situação indeterminada», dizendo-se em particular que «$\frac{+\infty}{+\infty}$ é uma indeterminação». Significa que a informação disponível sobre os limites das sucessões (u_n) e (v_n) não é suficiente para concluir, sendo necessário um estudo mais detalhado. Outros casos de indeterminação são as situações

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad (+\infty) + (-\infty), \qquad 0 \times (\pm\infty), \qquad 1^\infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0.$$

Exemplo 4.3.1 Vejamos os seguintes três exemplos da indeterminação da forma 1^∞.

$$\lim 1^n, \qquad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Ora, uma vez que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $1^n = 1$, temos que $\lim 1^n = \lim 1 = 1$.
No caso da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, veremos mais adiante (Proposição 5.2.1) que o seu limite é o conhecido número de Neper, $e \approx 2,718$.
O limite da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ pode ser determinado recorrendo às Proposições 5.2.1 e 6.6.1:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\lim n} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Exemplo 4.3.2 $\lim 3n^2 - n$
Estamos perante uma indeterminação do tipo $(+\infty) + (-\infty)$: $\lim 3n^2 = 3 \times (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ e $\lim(-n) = (-1) \times (+\infty) = -\infty$. Contudo, o cálculo

$$3n^2 - n = n^2\left(3 - \frac{1}{n}\right),$$

em que colocámos em evidência o termo de maior grau, permite concluir. É usual dizer-se que se "levantou a indeterminação":

$$\lim 3n^2 - n = \lim n^2\left(3 - \frac{1}{n}\right) = (+\infty) \times (3 - 0) = +\infty.$$

Esta ideia permite estabelecer o seguinte resultado mais geral, relativo ao limite de sucessões polinomiais:

Proposição 4.3.1 Seja $p_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ uma sucessão polinomial, $a_k \neq 0$. Então,

- Se $a_k > 0$, $\lim p_n = +\infty$;
- Se $a_k < 0$, $\lim p_n = -\infty$.

Demonstração. Basta colocar em evidência o termo n^k:

$$\lim p_n = n^k \times \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}\right) = (+\infty) \times a_k = \pm\infty,$$

consoante o sinal de a_k. ∎

Estudemos agora o caso das sucessões racionais, da forma $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, onde (p_n) e (q_n) são sucessões polinomiais:

Exemplo 4.3.3 $\lim \dfrac{3n^2 - 1}{2n^2 + n + 3}$

Trata-se de uma indeterminação do tipo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Pode ser levantada colocando em evidência, no numerador como no denominador, o termo de maior grau:

$$\lim \frac{3n^2 - 1}{2n^2 + n + 3} = \lim \frac{n^2(3 - \frac{1}{n^2})}{n^2(2 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2})} = \frac{3 - 0}{2 + 0 - 0} = 3.$$

O método utilizado neste exemplo é suficientemente geral para permitir determinar o limite de qualquer sucessão racional:

Proposição 4.3.2 Condiremos a sucessão racional de termo geral $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, onde $p_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ e $q_n = b_{k'} n^{k'} + b_{k'-1} n^{k'-1} + \cdots + b_1 n + b_0'$ duas sucessões polinomiais ($a_k \neq 0$ e $b_{k'} \neq 0$). Então,

- Se $k' > k$, $\lim r_n = 0$;
- Se $k' = k$, $\lim r_n = \dfrac{a_k}{b_{k'}}$;
- Se $k' < k$, $\lim r_n = \pm\infty$, sendo o sinal escolhido de acordo com o sinal de $\dfrac{a_k}{b_{k'}}$.

Demonstração. Colocando em evidência os termos de maior grau,

$$r_n = \frac{n^k \times \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}\right)}{n^{k'} \times \left(b_{k'} + \frac{b_{k'-1}}{n} + \cdots + \frac{b_1}{n^{k'-1}} + \frac{b_0}{n^{k'}}\right)}.$$

O resultado é agora imediato simplificando esta expressão de acordo com cada um dos três casos elencados na propriedade. ∎

Esta ideia pode ser utilizada até em situações mais gerais, como ilustrado neste exemplo final:

Exemplo 4.3.4 $\lim \dfrac{\sqrt{5n^3+2}+2\sqrt[3]{n+1}+3}{n\sqrt{n+1}+1}$

Para levantar esta indeterminação do tipo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, observemos o seguinte:

- Para n grande, tem-se aproximadamente $\sqrt{5n^3+2}+2\sqrt[3]{n+1}+3 \approx \sqrt{5n^3}+2\sqrt[3]{n}+3$, uma vez que $5n^3 >> 2$ e $n >> 1$;
- Da mesma forma, $n\sqrt{n+1}+1 \approx n\sqrt{n}+1 = n^{\frac{3}{2}}+n$, já que $n >> 1$.

Estas ideias pouco rigorosas são contudo motivadoras para se colocar em evidência, tanto no numerador como no denominador, $n^{\frac{3}{2}}$:

$$\lim \frac{\sqrt{5n^3+2}+2\sqrt[3]{n+1}+3}{n\sqrt{n+1}+1} = \lim \frac{n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{5+\frac{2}{n^3}}+\frac{2}{n^{\frac{7}{6}}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}{n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)} = \sqrt{5}.$$

4.4 Teoremas de Comparação

Em muitas situações é possível deduzir o limite de uma sucessão a partir do conhecimento do limite de uma outra. Consideremos por exemplo uma qualquer sucessão (u_n) tal que, para todo o $n \in N$,

$$u_n \geq n^2.$$

Como sabemos, $\lim n^2 = +\infty$. Assim, para todo o $M > 0$, existe uma ordem $p \in N$ a partir da qual $n^2 \geq M$. Mas $u_n \geq n^2$, logo, a partir dessa mesma ordem, $u_n \geq M$. Fica assim provado que $\lim u_n = +\infty$. Esta linha de argumentação permite facilmente provar o seguinte resultado mais geral:

Teorema 4.4.1

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões e $p \in \mathbb{N}$ tais que para todo o $n \geq p$, $u_n \geq v_n$. Então,

- Se $\lim v_n = +\infty$, $\lim u_n = +\infty$;
- se $\lim u_n = -\infty$, $\lim v_n = -\infty$;

Exemplo 4.4.1 Seja (u_n) uma sucessão tal que, para todo o n, $\dfrac{(n+2)u_n}{n^3+1} - 1 \geq 0$. Calcule $\lim u_n$.

Tem-se $\dfrac{(n+2)u_n}{n^3+1} \geq 1$, ou seja $u_n \geq \dfrac{n^3+1}{n+2}$.
Ora

$$\frac{n^3+1}{n+2} = \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = n^2 \times \frac{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}.$$

Como $u_n \geq n^2 \times \dfrac{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}$ e $\lim n^2 \times \dfrac{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = (+\infty) \times \dfrac{1}{1} = +\infty$, tem-se

$$\lim u_n = +\infty.$$

Um resultado fundamental para o desenvolvimento da Análise Matemática é a chamada "passagem ao limite em desigualdades", que de seguida se enuncia:

Teorema 4.4.2: Passagem ao limite em desigualdades

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes e $p \in \mathbb{N}$. Então, se para todo o $n \geq p$, $u_n \leq v_n$,

$$\lim u_n \leq \lim v_n.$$

Demonstração. Sejam L_1 e L_2 os limites das sucessões (u_n) e (v_n) respetivamente. Suponhamos pelo absurdo que se tem $L_1 > L_2$. Seja então $\varepsilon = \frac{1}{2}(L_1 - L_2) > 0$.
Por definição de limite, existem ordens $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq p_1 \Rightarrow L_1 - \varepsilon < u_n < L_1 + \varepsilon$$

e

$$n \geq p_2 \Rightarrow L_2 - \varepsilon < v_n < L_2 + \varepsilon.$$

Tomando $p = \max\{p_1; p_2\}$, ambos os enquadramentos são válidos para todo o $n \geq p$. Em particular,

$$v_n < L_2 + \varepsilon = \frac{1}{2}(L_1 + L_2) = L_1 - \varepsilon < u_n,$$

o que contraria a hipótese. Assim, $L_1 \leq L_2$, tal como se queria mostrar. ■

Como caso particular deste teorema, tem-se o resultado seguinte:

Observação 4.4.1 Seja (u_n) uma sucessão convergente e $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo o $n \geq p$, $u_n \geq 0$. Então

$$\lim u_n \geq 0.$$

Teorema 4.4.3: Teorema das Sucessões Enquadradas

Sejam (u_n), (v_n) e (w_n) e $p \in \mathbb{N}$ tais que, para todo o $n \geq p$,

$$v_n \leq u_n \leq w_n.$$

Se $\lim v_n = \lim w_n$ então (u_n) é convergente e tem-se $\lim u_n = \lim v_n = \lim w_n$.

Demonstração. A prova é semelhante à do teorema anterior. Seja $L = \lim v_n = \lim w_n$ e $\varepsilon > 0$. Como vimos, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq p$,

$$L - \varepsilon < v_n < L + \varepsilon \ \text{ e } \ L - \varepsilon < w_n < L + \varepsilon.$$

Assim, a partir dessa ordem,

$$L - \varepsilon < v_n \leq u_n \leq w_n < L + \varepsilon,$$

e, por definição de limite, $\lim u_n = L$. ■

Exemplo 4.4.2 Calcule o limite da sucessão de termo geral $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + n^2}$.

Tem-se, para todo o $k \in \{1; \ldots; n\}$, $\frac{1}{n^2 + n^2} \leq \frac{1}{k^2 + n^2} \leq \frac{1}{1^2 + n^2}$.
Assim,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2 + n^2},$$

ou seja

$$\frac{n}{2n^2} \leq u_n \leq \frac{n}{1+n^2}.$$

Como $\lim \frac{1}{2n} = \lim \frac{n}{1+n^2} = 0$, tem-se $\lim u_n = 0$.

Uma consequência imediata do Teorema das Sucessões Enquadradas é a seguinte:

Teorema 4.4.4: Produto de uma sucessão limitada por uma de limite nulo

Seja (u_n) uma sucessão de limite nulo e (v_n) uma sucessão limitada. Então

$$\lim u_n v_n = 0.$$

Demonstração. Seja C tal que para todo o $n \in N$, $|v_n| \leq C$ (Observação 4.1.1). Basta então observar que

$$0 \leq |u_n v_n| = |u_n||v_n| \leq C|u_n|.$$

Como $\lim C|u_n| = C \times 0 = 0$, pelo Teorema das Sucessões Enquadradas, $\lim |u_n v_n| = 0$, ou seja, $\lim u_n v_n = 0$. ■

Exemplo 4.4.3 O limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$ é nulo, uma vez que $\lim \frac{1}{n} = 0$ e que a função seno é limitada.

4.5 Subsucessões

Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = 2n$. Os primeiros termos desta sucessão são pois

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38\ldots$$

Escolhendo apenas alguns destes termos e ignorando os restantes

$$\cancel{2}, 4, \cancel{6}, \cancel{8}, 10, \cancel{12}, \cancel{14}, \cancel{16}, 18, 20, \cancel{22}, 24, \cancel{26}, 28, 30, \cancel{32}, 34, 36, \cancel{38}\ldots$$

obtém-se uma nova sucessão (v_n):

$$4, 10, 18, 20, 24, 28, 30, 34, 36\ldots$$

Aqui,

$$v_1 = u_2 = 4, v_2 = u_5 = 10, v_3 = u_9 = 18, v_4 = u_{10} = 20, v_5 = u_{12} = 24, v_6 = u_{14} = 28, v_7 = u_{15} = 30,$$

$$v_8 = u_{17} = 34, v_9 = u_{18} = 36\ldots\ldots$$

Optar por uma determinada escolha para a sucessão (v_n) é equivalente a definir uma sucessão crescente (p_n) com, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{p_n}$, ou seja, o p_n-ésimo termo da sucessão inicial é escolhido enquanto n-ésimo termo da nova sucessão. Neste exemplo tem-se $p_1 = 2$, $p_2 = 5$, $p_3 = 9$, $p_4 = 10$...etc.

Definição 4.5.1: Subsucessão de uma sucessão

Seja (u_n) uma sucessão. As sucessões de termo geral

$$v_n = u_{p_n},$$

onde (p_n) é estritamente crescente, dizem-se «subsucessões de (u_n)».

As subsucessões de termo geral $v_n = u_{2n}$ e $w_n = u_{2n-1}$ são usualmente designadas, respetivamente, por «subsucessão dos termos pares» e «subsucessão dos termos ímpares» de (u_n).

Exemplo 4.5.1 Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n + n$.
As subsucessões dos termos pares e dos termos ímpares são respetivamente dadas por

$$\begin{cases} v_n & = u_{2n} = (-1)^{2n} + 2n = 2n+1 \\ w_n & = u_{2n-1} = (-1)^{2n-1} + 2n - 1 = 2n-2. \end{cases}$$

O resultado seguinte garante que é sempre possível eliminar termos de uma dada sucessão por forma a obter-se uma sucessão crescente ou decrescente. Mais precisamente:

Proposição 4.5.1 Toda a sucessão (u_n) admite pelo menos uma subsucessão monótona (no sentido lato).

Demonstração. Consideremos o conjunto

$$I = \{p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p, u_p \leq u_n\},$$

ou seja, I é o conjunto dos índices p para os quais u_p é menor ou igual do que todos os termos de ordem superior a p. Colocam-se agora dois casos:

- Se I for infinito: numerando os elementos de I por ordem crescente,

  $$p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \dots$$

  a subsucessão de (u_n) de termo geral $v_n = u_{p_n}$ é crescente (no sentido lato), já que, como $p_n \in I$ e $p_n < p_{n+1}$, tem-se por definição de I que $v_n = u_{p_n} \leq u_{p_{n+1}} = v_{n+1}$.

- Se I for finito: seja $p_1 = \max\{I\} + 1$.
  Escolhemos então $v_1 = u_{p_1}$. Como $p_1 \notin I$ (porque $p_1 > \max\{I\}$), existe $p_2 > p_1$ tal que $u_{p_2} < u_{p_1}$. Por sua vez, como $p_2 \notin I$, existe $p_3 > p_2$ com $u_{p_3} < u_{p_2}$. Constroi-se assim por recorrência uma sucessão (p_n) tal que a sucessão de termo geral $v_n = u_{p_n}$ é (estritamente) decrescente.

■

Uma consequência fundamental desta propriedade é o chamado Teorema de Bolzano-Weierstraß, que constitui um dos pilares da Análise Real, como veremos nos capítulos seguintes:

Teorema 4.5.1: Teorema de Bolzano-Weierstraß

Seja (u_n) uma sucessão limitada. Então (u_n) admite uma subsucessão convergente.

Demonstração. À luz da Proposição 4.5.1, a prova é imediata. A sucessão (u_n) admite uma subsucessão monótona, que, sendo limitada, é convergente. ■

Tomando o exemplo da sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$, note-se que

$$\lim u_{2n} = 1 \text{ e } \lim u_{2n-1} = -1.$$

Os limites das subsucessões têm um papel muito importante na análise do comportamento das sucessões iniciais. Este facto motiva a seguinte definição:

Definição 4.5.2: Sublimites

Seja (u_n) uma sucessão.
Os limites das subsucessões de (u_n) dizem-se os «valores de aderência» ou «sublimites» de (u_n).

Comecemos por um enunciar um primeiro resultado:

Proposição 4.5.2 Seja (u_n) uma sucessão. Então,

$$(u_n) \text{ não majorada} \Leftrightarrow (+\infty) \text{ é sublimite de } (u_n);$$
$$(u_n) \text{ não minorada} \Leftrightarrow (-\infty) \text{ é sublimite de } (u_n).$$

Demonstração. Suponhamos que (u_n) é não majorada.
$n = 1$ não é majorante de (u_n) pelo que existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{p_1} \geq 1$;
$n = 2$ não é majorante de (u_n) pelo que existe $p_2 \geq p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{p_2} \geq 2$;
constrói-se desta forma uma sucessão (p_n) crescente tal que, para todo o $n \in N$,

$$u_{p_n} \geq n.$$

Passando ao limite nesta desigualdade, $\lim u_{p_n} = +\infty$: $(+\infty)$ é de facto sublimite de (u_n). A implicação recíproca é imediata. A prova no caso de (u_n) ser não minorada é análoga, pelo que a omitimos. ■

Atendendo ao Teorema de Bolzano-Weierstraß, temos o seguinte corolário desta propriedade:

Corolário 4.5.3 Toda a sucessão admite pelo menos um sublimite.

O seguinte resultado decorre diretamente da definição de limite:

Teorema 4.5.2

Seja (u_n) uma sucessão e $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Então

$$\lim u_n = L \Leftrightarrow \text{Para toda a subsucessão } (v_n) \text{ de } (u_n),\ \lim v_n = L.$$

Em particular, se (u_n) admitir dois sublimites distintos, $\lim u_n$ não existe.

Este teorema permite por exemplo concluir que a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$ não tem limite uma vez que admite os sublimites $L_1 = -1$ e $L_2 = 1$.
Na verdade, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 4.5.4 Seja (u_n) uma sucessão, $(v_n) = (u_{2n})$ e $(w_n) = (u_{2n-1})$.
Se $\lim v_n = \lim w_n = L$ então $\lim u_n = L$.

Demonstração. Vamos considerar o caso em que $L \in \mathbb{R}$. Se $L = \pm\infty$ a demonstração é análoga. Dado $\varepsilon > 0$, existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p_1 \Rightarrow |v_n - L| < \varepsilon$, ou seja, para $k \geq 2p_1$, k par, $|u_k - L| < \varepsilon$. Da mesma forma, existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq 2p_2 - 1$, k ímpar, $|u_k - L| < \varepsilon$.
Tomando $p_0 = \max\{2p_1; 2p_2 - 1\}$, se $k \geq p_0$, $|u_k - L| < \varepsilon$ e, por definição, $\lim u_n = L$. ■

Exemplo 4.5.2 Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left|\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right|$.
Tem-se

$$u_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+2} + \frac{1}{\sqrt{2n}}|\cos(n\pi)| = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0$$

e

$$u_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n-1}}{2n+1} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left|\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right| = -\frac{1}{2n+1} \to 0$$

pelo que $\lim u_n = 0$.

Os teoremas 4.4.1 e 4.5.2 permitem concluir quanto à existência ou não existência de limite das sucessões de termo geral $u_n = r^n$ ($r \in \mathbb{R}$), ditas «geométricas», que serão objeto de um estudo mais detalhado no capítulo seguinte:

Proposição 4.5.5 Seja $u_n = r^n$ com $r \in \mathbb{R}$.

Se $r > 1$, $\lim u_n = +\infty$;
Se $-1 < r < 1$, $\lim u_n = 0$;
Se $r \leq -1$, o limite da sucessão (u_n) não existe.

Demonstração.

- Caso $r > 1$.
  Tem-se que $r = 1 + a$, onde $a > 0$. Pelo binómio de Newton,
  $$r^n = (1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k 1^{n-k} \geq 1 + na.$$
  Como $\lim(1+na) = +\infty$, $\lim u_n = +\infty$.

- Caso $r \leq -1$.
  Se $r = -1$, $u_n = (-1)^n$, e vimos já que (u_n) não admite limite.
  Se $r < -1$, $u_n = (-1)^n |r|^n$. Como $|r| > 1$, $\lim |r|^n = +\infty$.
  Assim, $\lim u_{2n} = +\infty$ e $\lim u_{2n+1} = -\infty$, pelo que (u_n), admitindo dois sublimites distintos, não tem limite.

- Caso $-1 < r < 1$.
  Se $r = 0$, tem-se trivialmente que $\lim u_n = 0$. Se $r \neq 0$, $\dfrac{1}{|r|} > 1$, pelo que $\lim \left(\dfrac{1}{|r|}\right)^n = +\infty$ e $\lim |r|^n = \lim |r^n| = 0$.

■

Retomando o exemplo $u_n = (-1)^n$, vimos que $L_1 = -1$ e $L_2 = 1$ são sublimites de (u_n). É fácil provar, neste exemplo, que qualquer outra subsucessão convergente de (u_n) tenderá necessariamente para um destes dois limites. Assim L_1 é o menor sublimite de (u_n) e L_2 o maior. De forma mais geral, qualquer sucessão admite um maior e um menor sublimite:

Teorema 4.5.3: Limite superior e limite inferior

Seja (u_n) uma sucessão. Então (u_n) admite um maior sublimite (eventualmente infinito), dito ≪limite superior de (u_n)≫ e denotado ≪$\limsup u_n$≫.
Da mesma forma, admite igualmente um menor sublimite, finito ou infinito, o ≪limite inferior de (u_n)≫, ≪$\liminf u_n$≫.

Demonstração. Seja (u_n) uma sucessão. Comecemos por supor que (u_n) não é majorada. Então, como vimos, $(+\infty)$ é sublimite de (u_n), pelo que não há nada a demonstrar. Da mesma forma, se (u_n) admitir um único sublimite, o resultado é trivial.
Vamos pois supor que (u_n) é majorada e que admite pelo menos dois sublimites.
Seja X o conjunto dos sublimites finitos de (u_n) e $S = \sup\{X\}$. Como estamos a supor que (u_n) admite pelo menos dois sublimites, ainda que $(-\infty)$ seja um deles, tem-se $X \neq \emptyset$.
Basta provar que S é sublimite de (u_n) para terminarmos a demonstração. Para o efeito, vamos supor pelo absurdo que S não é sublimite de L.
Consideremos $n \in \mathbb{N}$. $S - \frac{1}{n}$ não é majorante de X pelo que existe um sublimite L de (u_n) com $S - \frac{1}{n} < L < S$. A segunda desigualdade resulta do facto de termos suposto que S não é sublimite de (u_n). Como L é limite de uma certa subsucessão de (u_n), existe $p_n \in \mathbb{N}$, tão grande quanto se queira, tal que $S - \frac{1}{n} < u_{p_n} < S$. Passando ao limite, obtém-se que $\lim u_{p_n} = S$, o que é absurdo.
A demonstração para a existência de limite inferior segue as mesmas linhas. ■

Terminamos este capítulo com o seguinte resultado:

Proposição 4.5.6 Seja (u_n) uma sucessão. Então

$$\liminf u_n = \limsup u_n$$

é condição necessária e suficiente para que (u_n) admita limite. Tem-se então

$$\lim u_n = \liminf u_n = \limsup u_n.$$

Demonstração. Seja $L = \liminf u_n = \limsup u_n$. Vamos supor que $L \in \mathbb{R}$, os restantes casos podendo ser tratados de forma análoga.
Seja $\varepsilon > 0$. Se existirem uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}$ tais que $u_n \notin]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$, podemos construir uma subsucessão (v_n) de (u_n) com valores em $\mathbb{R} \backslash]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$. Atendendo ao Corolário 4.5.3, (v_n) admitiria pelo menos um sublimite, que teria valor distinto de L, o que é absurdo já que L é o único sublimite de (u_n). Logo, a condição $u_n \notin]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$ apenas se verifica para um número finito de termos. Sendo n_0 o maior desses índices,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon,$$

e $\lim u_n = L$. A implicação recíproca é imediata pelo Teorema 4.5.2. ■

4.5.1 Exercícios

Exercício 4.5.1 Averigue se cada uma das sucessões seguintes é majorada, minorada ou limitada. Caso existam, explicite o ínfimo e o supremo.

$(a)\ a_n = \dfrac{5n+3}{3n-1}$ $(b)\ b_n = \dfrac{2n^2+5}{4n-3}$ $(c)\ c_n = \sqrt[n]{2^{3n}+5^n+3^n}$

$(d)\ d_n = \dfrac{n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+7}$ $(e)\ e_n = \dfrac{n^2\cos(n\pi)}{n+2}$ $(f)\ f_n = 1+(-1)^n\dfrac{1}{n}$

$(g)\ g_1 = 1 \wedge \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$

Exercício 4.5.2 Mostre que qualquer sucessão crescente é minorada e que qualquer sucessão decrescente é majorada.

Exercício 4.5.3 Estude a monotonia das sucessões de termos gerais:

$(a)\ a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ $(b)\ b_n = |n^2-60|+12$

$(c)\ c_n = \dfrac{n+2}{2n^2-1}$ $(d)\ d_n = \dfrac{2^n}{4n-1}$

$(e)\ e_n = (-1)^n n^2$ $(f)\ f_n = n^{(-1)^n}$

$(g)\ g_n = a+(n-1)r$ $(h)\ h_n = ar^{n-1} \qquad (a,r\in\mathbb{R})$

$(i)\ i_n = \begin{cases} n+2, & n\le 5 \\ \dfrac{n}{n+6}, & n>5 \end{cases}$ $(j)\ j_n = \begin{cases} 2, & n=1 \\ \dfrac{b_{n-1}}{\sqrt{3+(b_{n-1})^2}}, & n>1 \end{cases}$

Exercício 4.5.4 Considere a sucessão $u_n = \dfrac{15-4n}{2n+3}$.

(a) Determine a mais pequena ordem $p\in\mathbb{N}$ a partir da qual:

(i) $|u_n+2| < 100$; (ii) $|u_n+2| < 10$;

(iii) $|u_n+2| < \dfrac{1}{2}$; (iv) $|u_n+2| < \dfrac{1}{4}$;

(v) $|u_n+2| < \dfrac{1}{10}$; (vi) $|u_n+2| < \dfrac{1}{100}$.

(b) Mostre, por definição, que (u_n) converge para -2.

Exercício 4.5.5 Prove, por definição, que:

$(a)\ \lim \dfrac{2-5n}{4n} = -\dfrac{5}{4}$ $(b)\ \lim\ n^2+2n+5 = +\infty$ $(c)\ \lim \dfrac{e+2n}{n+3} = 2$

$(d)\ \lim \dfrac{6n^2-4}{4n^2+3n+2} = \dfrac{3}{2}$ $(e)\ \lim \dfrac{\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{n^2-7} = 0$ $(f)\ \lim \dfrac{3n+1}{2+n+n^3} = 0$

$(g)\ \lim \dfrac{3n^2-7}{1-n} = +\infty$ $(h)\ \lim\ 2-n^4-4n^2 = -\infty$ $(i)\ \lim \dfrac{n}{3n+2(-1)^{n-1}} = \dfrac{1}{3}$

Exercício 4.5.6 Sejam (x_n) e (y_n) duas sucessões convergentes, de limites respetivos $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Mostre que

(a) $x < y \Leftrightarrow \left(\exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow x_n < y_n\right)$;

(b) $x_n < y_n$ para infinitos valores de $n \in \mathbb{N} \ \Leftrightarrow x < y$.

Exercício 4.5.7 Calcule os seguintes limites:

$(a)\ \lim \dfrac{2n+3}{3n-1}$ $\quad (b)\ \lim \dfrac{n^2-1}{n^4+3}$ $\quad (c)\ \lim \dfrac{n^3+1}{n^2+2n-1}$

$(d)\ \lim \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$ $\quad (e)\ \lim \sqrt{n}\dfrac{\sqrt{n}+3}{(\sqrt{n}+1)^2}$ $\quad (f)\ \lim n!n^{-1000}$

$(g)\ \lim \dfrac{5-n^6+3n^2-4n^4-15}{7n-6n^4+n^2}$ $\quad (h)\ \lim \dfrac{20n^8-n^{10}+n-2}{n^7-4n^3+100n^8}$ $\quad (i)\ \lim \dfrac{6^{1-n}-2^{-3n}}{7^{-n}+4^{2-n}}$

$(j)\ \lim \dfrac{10^n-15^{n+1}+2}{12^{n+2}+11^n}$ $\quad (k)\ \lim \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}+6\times\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{4}\right)^n}$ $\quad (l)\ \lim \dfrac{3^n-4^{n+1}+1}{5\times 2^{2n}+2^{n-1}}$

Exercício 4.5.8 Calcule os seguintes limites:

$(a)\ \lim \dfrac{9n+\sin^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{4-3n}$ $\quad (b)\ \lim \dfrac{n^6+\cos\left(n^2\pi\right)}{1+n^3-n^4}$ $\quad (c)\ \lim \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{9}{2n^2+n-i^3}$

$(d)\ \lim \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ $\quad (e)\ \lim \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ $\quad (f)\ \lim \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$

$(g)\ \lim \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^2+kn-5}{5n^2-3k}$ $\quad (h)\ \lim \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4n^2}{6n^3+11k}$ $\quad (i)\ \lim \displaystyle\sum_{j=1}^{2n} \frac{2n-j}{\sqrt{8n^2+3j}}$

Exercício 4.5.9 Dê exemplos de três sucessões (u_n), (v_n) e (w_n), tais que:

- (u_n) é divergente, limitada e não monótona;
- (v_n) é divergente, não limitada e monótona;
- (w_n) é divergente, não limitada e não monótona.

Exercício 4.5.10 Mostre, pelo absurdo, que o limite de uma sucessão, quando existe, é único.

Exercício 4.5.11 Uma sucessão (u_n) diz-se de Cauchy se, para todo o $\varepsilon > 0$, existir uma ordem p tal que

$$m,n \geq p \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

Mostre que

$(a)\ u_n = \dfrac{1}{n}$ é uma sucessão de Cauchy;

$(b)\ v_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ não é uma sucessão de Cauchy.

Sugestão: Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_{2n} - v_n| > \dfrac{1}{2}$.

(c) Mostre que toda a sucessão convergente é de Cauchy e conclua quanto à natureza da sucessão definida na alínea anterior.

Exercício 4.5.12 Considere a sucessão (a_n) definida pelo termo geral $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

(a) Mostre que (a_n) é decrescente.

(b) Mostre que, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq \dfrac{1}{n}$.

(c) Utilizando a alínea anterior, conclua quanto à natureza da sucessão.

Exercício 4.5.13

(a) Seja (v_n) uma sucessão de termos positivos. Mostre que

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = a \Rightarrow \lim \sqrt[n]{v_n} = a.$$

(b) Calcule o limite das sucessões de termo geral

$$u_n = n^{\frac{1}{n}}, \qquad v_n = \sqrt[n]{n!}, \qquad w_n = \sqrt[n]{\frac{n^2+n-1}{n+3}} \qquad \text{e} \qquad z_n = n^{-\frac{1}{n}}.$$

Exercício 4.5.14 Calcule

(a) $\lim \sqrt[n]{n^2+6}$

(b) $\lim \sqrt[n]{8^n + 3 \times 5^n}$

(c) $\lim \sqrt[n]{a^n+b^n},\ a,b>0$

(d) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{3^{n+4} n!}{n^{n+1}}}$

(e) $\lim \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Exercício 4.5.15 Estude a existência de limite das sucessões:

(a) $a_n = \left(\dfrac{2}{n}\right)^{(-1)^n}$

(b) $b_n = \dfrac{\cos((n+2)\pi)}{n} + \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-2}$

(c) $c_n = \cos\left(\dfrac{n^2\pi + \sin(n\pi)}{n^2}\right)$

(d) $d_n = \sqrt[n]{6^n + (-6)^n}$

$$(e)\ \ e_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=-1}^{n+1} \frac{3}{\sqrt{i+2n^4}}, & n \text{ par} \\[2ex] \dfrac{3^n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{5^{n+1}+4^n}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$(f)\ \ f_n = \begin{cases} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \dfrac{\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} - 4n - n^3}{2 - e^2 n^3}, & n \text{ par} \\[2ex] \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{3n+1}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Exercício 4.5.16 Determine o conjunto dos sublimites das sucessões definidas por

(a) $u_n = \dfrac{1}{n} + \cos(n\pi)$ (b) $v_n = \ln\left|\cos\left(\dfrac{(n+1)\pi}{3}\right)\right| + \ln(2+(-1)^n)$

(c) $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{2n} = \dfrac{n}{2n+1} \wedge u_{2n-1} = -\dfrac{n}{2n-1}$.

Exercício 4.5.17 Considere as seguintes sucessões:

$$u_n = \frac{\sin((n+1)\pi)}{4} \text{ e } v_n = \lim \sum_{l=4}^{n} \frac{2}{l+5n^2}.$$

(a) Mostre que (u_n) é divergente.

(b) Mostre que (v_n) é convergente e calcule o limite de (v_n).

(c) Mostre que a sucessão $(w_n) = (u_n) \times (v_n)$ é convergente e indique o limite de (w_n).

Exercício 4.5.18 Sejam a e b números estritamente positivos, com $a \geq b$. A média aritmética de a e b é dada por $m_A(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$. Designa-se por média geométrica de a e b o número real $m_G(a,b) = \sqrt{ab}$.

(a) Mostre que $m_A(a,b) \geq m_G(a,b)$.

(b) Mostre que $m_A(a,b) = m_G(a,b) \Leftrightarrow a = b$.

(c) Sejam agora as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = m_A(u_n, v_n), \quad n \geq 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} v_1 = b \\ v_{n+1} = m_G(u_n, v_n), \quad n \geq 1 \end{cases}.$$

(i) Mostre que, $\forall n \in \mathbb{N},\;\; u_n \geq v_n$.

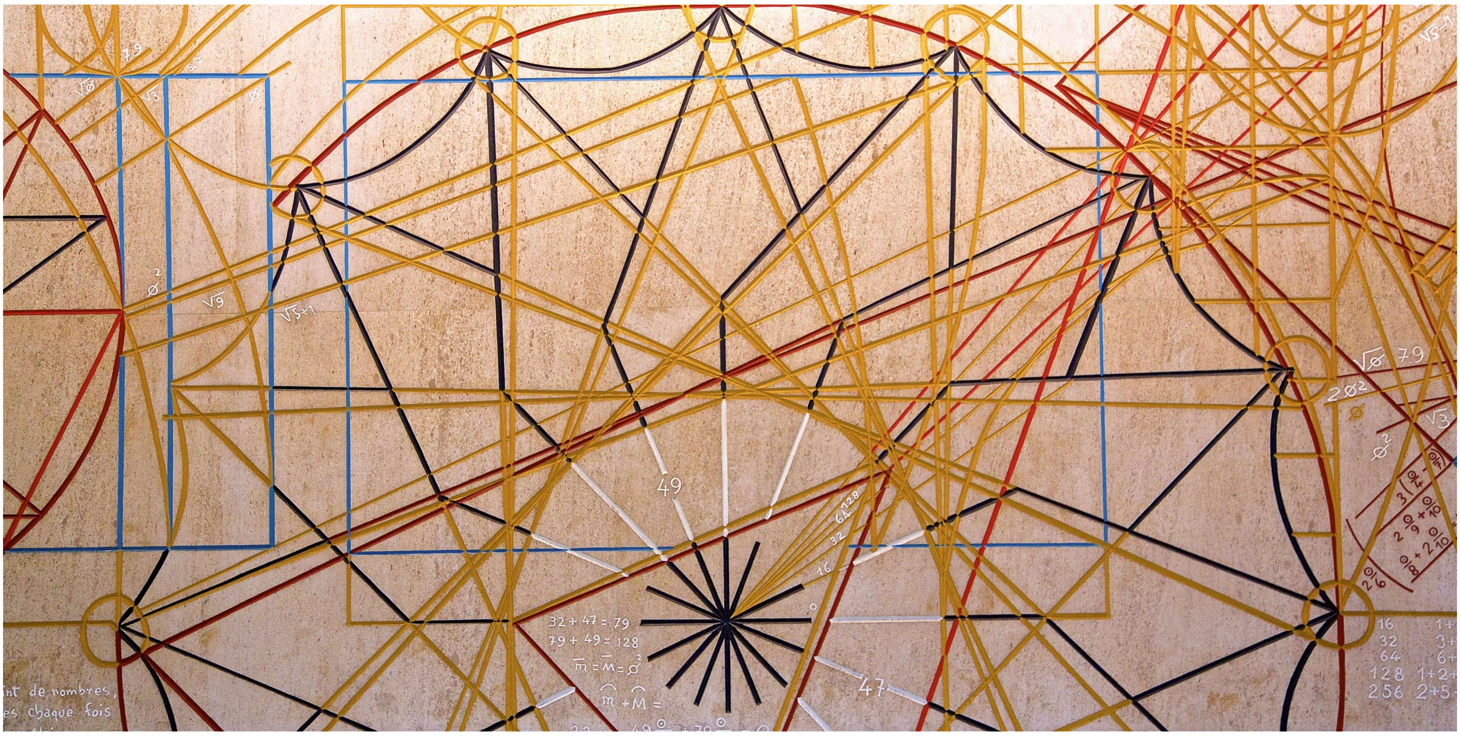
(ii) Mostre que (u_n) e (v_n) são sucessões monótonas.

(iii) Mostre que (u_n) e (v_n) são sucessões limitadas.

(iv) Mostre que

$$\forall n \geq 2,\;\; u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

(v) Justifique que (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes e mostre que $\lim u_n = \lim v_n$.
Nota: este limite designa-se por média aritmético-geométrica de a e b.



5. Progressões Geométricas

As progressões geométricas constituem uma importante família de sucessões numéricas. São caracterizadas por se poder obter cada termo multiplicando o anterior por uma mesma constante:

Definição 5.0.1: Progressão geométrica

Uma sucessão (u_n) diz-se «geométrica» se existir $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = ru_n.$$

O número r diz-se então a «razão» de (u_n).

O segundo termo de uma progressão geométrica é igual a $u_2 = ru_1$, o terceiro a $u_3 = ru_2 = r^2u_1$, e de forma mais geral, tem-se para todo o $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = r^{n-1}u_1.$$

Exemplo 5.0.1 Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{2 \times 3^{2n-1}}{5^n}$.
Será que se trata de uma progressão geométrica? Uma forma simples de o determinar é efetuar o cálculo do quociente $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2 \times 3^{2(n+1)-1}}{5^{n+1}}}{\dfrac{2 \times 3^{2n-1}}{5^n}} = \frac{5^n}{2 \times 3^{2n-1}} \times \frac{2 \times 3^{2n+1}}{5^{n+1}} = \frac{9}{5}.$$

Trata-se pois da progressão geométrica de razão $\dfrac{9}{5}$ já que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{9}{5}$. Observado que o primeiro termo é igual a $u_1 = \dfrac{6}{5}$, podemos escrever o termo geral desta sucessão na forma canónica $u_n = \dfrac{6}{5}\left(\dfrac{9}{5}\right)^{n-1}$.

As progressões geométricas aparecem de forma natural num grande número de conceitos do Cálculo Financeiro:

Aplicação 1: Capitalização em regime de juro composto em tempo discreto

Valor Acumulado Consideremos que um determinado banco paga um juro anual de 3%. Assim, se investirmos hoje um capital inicial de 500 euros, teremos disponíveis dentro de um ano

$$500 + 500 \times 0,03 = 500 \times 1,03 = 515 \text{ euros}.$$

Este montante será o capital inicial para um segundo ano de rendimentos. Assim, dentro de dois anos teremos

$$515 + 0,03 \times 515 = 515 \times 1,03 = 500 \times 1,03^2 = 530,45 \text{ euros},$$

e, dentro de três anos,

$$500 \times (1,03)^3 = 546,36 \text{ euros}.$$

Assim, considerando um capital inicial C_0 e um juro de $i = r\%$ por período, o capital disponível ao fim de N períodos é de

$$C_N = C_0 \times (1+i)^N = C_0 \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)^N.$$

Taxa de juro nominal vs Taxa de juro efetiva Note-se que este capital é equivalente à

aplicação de um juro único de $I = R\%$, tal que

$$C_0(1+I) = C_0 \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)^N,$$

isto é,

$$I = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^N - 1.$$

A I é usual chamar-se ≪taxa de juro efetiva≫, por oposição a $i = r\%$, que neste contexto é designado por ≪taxa de juro nominal≫.

Valor Atual Imaginemos agora que alguém recebe hoje um documento que poderá ser trocado, dentro de um ano, por 1000 euros. Qual será o valor atual deste documento? Certamente menos de 1000 euros, seria preferível poder dispor deste montante desde já. Por outro lado, o documento valerá certamente alguma coisa...

A forma correta de colocar esta questão é a seguinte: quanto se teria de investir hoje para se receber, dentro de um ano, 1000 euros? Tomando um juro anual de $i = r\%$, teríamos de investir

$$\frac{1000}{1+i}.$$

Da mesma forma, para se obter 1000 euros dentro de 2 anos, seria necessário investir hoje

$$\frac{1000}{(1+i)^2}.$$

Mais geralmente, o ≪valor atual≫ de um capital C a receber dentro de N períodos, considerando um juro de $i = r\%$ por período, é dado por

$$C_N = \frac{C}{(1+i)^N}.$$

Aplicação 2: Escolha do melhor investimento

Exercício
Dois bancos A e B propuseram a um mesmo cliente um depósito a prazo a 1 ano. A taxa de juro anual do banco A é de 2% e a do banco B de $1,9\%$. O banco A paga juros semestralmente e o banco B paga juros todos os meses. Qual é, em cada um dos casos, a taxa de juro efetiva? Qual das aplicações é mais vantajosa para o cliente?

Resolução
Para a aplicação do banco A, tem-se

$$\left(1+\frac{0,02}{2}\right)^2-1=0,0201.$$

A taxa de juro efetiva da aplicação proposta pelo banco A é assim de $2,01\%$.

No caso da opção pelo banco B, tem-se

$$\left(1+\frac{0,019}{12}\right)^{12}-1=0,0192.$$

A taxa de juro efetiva da aplicação proposta pelo banco B é então de $1,92\%$.
O cliente deve assim optar pela aplicação do banco A.

5.1 Sucessão das somas parciais de uma progressão geométrica

Seja (u_n) a progressão geométrica de primeiro termo u_1 e de razão $r\in\mathbb{R}$. Consideremos a respetiva ≪sucessão das soma parciais≫, de termo geral

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}u_n$$

correspondente à soma dos N primeiros termos de (u_n). Se $r=1$ todos os termos da sucessão são iguais a u_1 pelo que $S_N=Nu_1$...E, para $r\neq 1$? Existirá igualmente uma expressão simples para S_N? A resposta é afirmativa. Multipliquemos S_N por $1-r$:

$$(1-r)S_N=S_N-rS_N=(u_1+ru_1+r^2u_1+\cdots+r^{N-1}u_1)-r(u_1+ru_1+r^2u_1+\cdots+r^{N-1}u_1).$$

Facilmente se observa que todos os termos se simplificam, com exceção do termo u_1 e do termo $-u_1r^N$. Acabámos pois de justificar o seguinte resultado:

Teorema 5.1.1: Soma dos termos de uma progressão geométrica

Seja (u_n) uma progressão geométrica de razão $r\neq 1$ e $S_N=\sum_{n=1}^{N}u_n$. Tem-se então, para todo o $N\in\mathbb{N}$,

$$S_N=u_1\frac{1-r^N}{1-r}.$$

Exemplo 5.1.1 Calculemos a soma

$$S = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{16} + \frac{3}{32} - \frac{3}{64} + \frac{3}{128}.$$

Trata-se da soma dos 7 primeiros termos da progressão geométrica de primeiro termo $u_1 = \frac{3}{2}$ e razão $r = -\frac{1}{2}$. Assim,

$$S = \frac{3}{2} \times \frac{1-(-\frac{1}{2})^7}{1-(-\frac{1}{2})} = 3\left(1+\frac{1}{2^7}\right) = \frac{387}{128}.$$

5.2 O número de Neper e - função exponencial

Tomemos a situação hipotética de um banco que oferece um juro anual de $i = 100\%$. Investindo hoje 1 euro, iremos naturalmente obter, dentro de 1 ano,

$$u_1 = 1 \times (1+1) = 2 \text{ euros.}$$

O que acontece se o banco dividir este juro anual de 100% em dois períodos, capitalizando 50% ao fim do primeiro semestre e outros 50% ao final do segundo? Nessa situação, como vimos, o nosso saldo no final do ano será de

$$u_2 = 1 \times \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 \text{ euros.}$$

Continuando este processo, e dividindo o juro de 100% por 3, 4 e 5 períodos de capitalização, obteremos respetivamente,

$$u_3 = 1 \times \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2,37 \text{ euros,}$$

$$u_4 = 1 \times \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2,44 \text{ euros}$$

e

$$u_5 = 1 \times \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = 2,49 \text{ euros.}$$

A divisão do juro anual por vários períodos parece proveitosa. Será que se continuarmos este processo obteremos ao final do ano montantes arbitrariamente grandes? Está em causa o comportamento da sucessão de termo geral

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Nesta potência, a base tende para 1 e o expoente para $+\infty$, pelo que estamos perante uma indeterminação: a resposta não é clara...Este problema foi pela primeira vez abordado e resolvido pelo matemático escocês John Napier (1550-1617), que demonstrou a convergência da sucessão (u_n). Comecemos por observar o seguinte:

Proposição 5.2.1 A sucessão de termo geral

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

é crescente e majorada.

Prova. *Para provarmos estas afirmações, comecemos por observar que para $x \in [0;1]$ e $n \in \mathbb{N}$ se tem*

$$(1-x)^n \geq 1 - nx,$$

desigualdade por vezes dita «desigualdade de Bernoulli». Esta desigualdade pode ser facilmente provada, por exemplo por indução. Para $n = 1$, é equivalente à proposição verdadeira $1 - x \geq 1 - x$. Admitindo agora que $(1-x)^n \geq 1 - nx$, tem-se $(1-x)^{n+1} \geq (1-nx)(1-x) \geq 1-(n+1)x$.

Observemos então que u_n é crescente. Para $n \geq 1$,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)^n = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1}.$$

Utilizando a desigualdade de Bernoulli com $x = \dfrac{1}{n^2}$,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{n-1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{n} - \frac{n^2-1}{n^3} = 1 + \frac{1}{n^3} > 1.$$

Tratando-se de uma sucessão de termos positivos, deduz-se que $u_n > u_{n-1}$ pelo que a sucessão é estritamente crescente.
Calculemos agora um majorante de (u_n). Pelo binómio de Newton,

$$u_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{1}\frac{1}{n^n}$$

Para $2 \leq p \leq n$ tem-se

$$\binom{n}{p}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{p!}\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}{n\times n\times n\cdots\times n} = \frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{p-1}{n}\right) \leq \frac{1}{p!}.$$

Note-se agora que para $p \geq 4$,

$$p! = 2\times 3\times 4\times 5\cdots\times p = 2\times 3\times 2\times 2\times 5\times\cdots\times p \geq 2^p$$

já que se obteve $p!$ como um produto de p termos nenhum inferior a 2. Assim, substituindo na desigualdade acima,

$$u_n \leq 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Somando os $n-3$ termos da progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ obtém-se

$$u_n \leq 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3} + \frac{1}{2^3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right) \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24}.$$

A sucessão é portanto convergente, designando-se o respetivo limite por «número de Neper», em homenagem a John Napier:

Definição 5.2.1: Número de Neper

Ao limite

$$e := \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

dá-se o nome de «número de Neper».

Note-se, observando a demonstração que se obteve um majorante para e: $e < \frac{67}{24} < 2,8$. Na verdade, a aproximação do número de Neper é, às milésimas,

$$e \approx 2,718.$$

Regressando ao nosso exemplo inicial, se continuarmos a dividir o juro anual de 100% por períodos iguais cada vez mais pequenos, obteríamos, no limite o montante

$$e \approx 2,72 \text{ euros}.$$

A esta situação limite é usual chamar-se «juro contínuo»:

Aplicação 3: Capitalização em regime de juro composto em tempo contínuo

Valor acumulado Consideremos um juro de $i = r\%$ por período de tempo. Como vimos, o capital ao fim de N períodos será de

$$C_0 \times \left(1+i\right)^N,$$

onde C_0 é o capital inicial. Se cada um destes períodos for dividido em n partes iguais, teremos ao todo nN períodos de capitalização, correspondendo a cada um deles um juro de $\dfrac{i}{n}$. Assim, teremos no final

$$C_0 \times \left(1+\frac{i}{n}\right)^{nN}.$$

Observemos que

$$\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nN} = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{i}}\right)^{\frac{n}{i}}\right)^{iN}.$$

Como veremos mais adiante neste curso, é relativamente simples demonstrar que também se tem

$$\lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{i}}\right)^{\frac{n}{i}} = e.$$

Assim, passando ao limite $n \to +\infty$ na expressão acima, obtemos ao final de N períodos o valor acumulado de

$$C_N = C_0 e^{iN},$$

dito «regime de juros contínuos».

Valor atual Nesse regime, o valor atual de um capital C a receber dentro de N períodos será portanto de

$$C_0 = Ce^{-iN}.$$

Aplicação 4: Rendas financeiras temporárias de termos constantes

Valor Acumulado Consideremos uma taxa de juro de $i = r\%$ por período. Qual o valor acumulado C_N de uma renda de termos constantes C_0 paga no final de cada período (dita «renda postecipada»), ao final de N períodos? O primeiro termo foi pago há $N-1$ períodos, tendo pois, como vimos, um valor de $C_0(1+i)^{N-1}$.
Da mesma forma, o segundo termo, pago há $N-2$ períodos, rendeu no presente $C_0(1+i)^{N-2}$,

e assim sucessivamente. Tem-se pois

$$C_N = C_0(1+i)^{N-1} + C_0(1+i)^{N-2} + \cdots + C_0(1+i) + C_0.$$

Trata-se da soma dos N primeiros termos da progressão geométrica de primeiro termo C_0 e razão $1+i$:

$$C_N = C_0 \frac{1-(1+i)^N}{1-(1+i)} = \frac{C_0}{i}((1+i)^N - 1).$$

Valor atual Qual o valor de uma renda com estas características no momento em que vai começar a ser paga? Vimos que o valor atual de uma parcela a ser paga dentro de n períodos é de $\dfrac{C_0}{(1+i)^n}$. Obtemos pois o valor atual da renda calculando o somatório

$$\frac{C_0}{1+i} + \frac{C_0}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_0}{(1+i)^N} = \frac{C_0}{1+i} \frac{1-\frac{1}{(1+i)^N}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{C_0}{i}\left(1 - \frac{1}{(1+i)^N}\right).$$

Rendas antecipadas Caso os pagamentos sejam efetuados no início de cada período (≪renda antecipada≫), é fácil ver que o valor acumulado, ao final de N períodos, é de

$$C_0(1+i)^N + C_0(1+i)^{N-1} + \cdots + C_0(1+i)^2 + C_0(1+i) = C_0\left(1+\frac{1}{i}\right)((1+i)^N - 1).$$

5.3 Noção de série Geométrica

Temos frequentemente a intuição de que se somarmos uma infinidade de quantidades estritamente positivas obteremos um resultado infinito. Trata-se de uma ideia errada, como o seguinte exemplo geométrico ilustra:

Consideremos intervalos I_1, I_2, ..., I_n,..., de comprimentos respetivos $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,...,$\frac{1}{2^n}$,..., que vamos justapor extremo a extremo. Cada vez que se introduz um novo destes segmentos de reta preenche-se exatamente metade do que faltaria para se obter um segmento de reta de comprimento igual a 1 unidade:

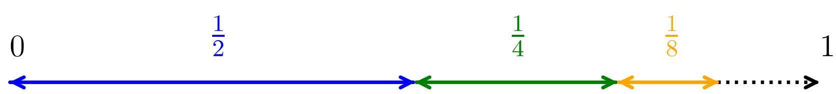


Figura 5.1: Justaposição dos segmentos de reta I_n

Assim, seria expetável que a soma (infinita) de todos os comprimentos dos segmentos de reta I_n fosse igual a 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1.$$

Nesta secção vamos formalizar um pouco este procedimento, que corresponde ao conceito matemático de série. Consideremos uma sucessão (u_n) e a soma dos respetivos N primeiros termos

$$S_N = u_1 + u_2 + \cdots + u_N.$$

A maneira correta de considerar a ≪soma infinita≫ de todos os termos da sucessão (u_n) é através do limite da sucessão (S_N):

Definição 5.3.1: Séries numéricas

Seja (u_n) uma sucessão numérica e $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$. Se o limite $\lim S_N$ existir e for finito, diz-se que ≪a série $\sum u_n$ converge≫. Denota-se então por $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ esse limite:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n := \lim S_N,$$

dito a ≪soma da série≫. Se $\lim S_N$ não existir ou for infinito diz-se que ≪a série $\sum u_n$ diverge≫.

Regressando ao exemplo dos intervalos I_n, os respetivos comprimentos são os termos da progressão geométrica $u_n = \frac{1}{2^n}$ de razão $r = \frac{1}{2}$ e de primeiro termo $u_1 = \frac{1}{2}$. Assim, a soma dos comprimentos dos intervalos é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

como preconizado.

Exemplo 5.3.1 Tomemos o exemplo da sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. O termo geral da sucessão das somas parciais é dado por

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{N\times(N+1)}.$$

Será que esta sucessão tem um limite? Observando que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1},$$

podemos reescrever S_N da seguinte forma:

$$S_N = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Nesta forma, é fácil observar que $\lim S_N = 1$. Assim, a série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge e tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots = 1.$$

Contrariamente a este último exemplo, o limite $\lim S_N$, quando existe, não é fácil de determinar. Contudo, no caso das progressões geométricas, trata-se de um exercício simples. De facto, vimos que o termo geral da sucessão das somas parciais de uma progressão geométrica de razão $r \neq 1$ é dada por

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_1 \frac{1-r^N}{1-r}.$$

O limite $\lim r^N$ é nulo se $|r| < 1$, $+\infty$ se $r > 1$ e não existe se $r \leq -1$. Obtemos assim o seguinte resultado:

Teorema 5.3.1: Convergência das séries geométricas

Seja (u_n) uma sucessão geométrica de razão $r \neq 1$ e de primeiro termo não nulo. Então, a série $\sum u_n$ converge se e só se $|r| < 1$. Tem-se, nesse caso,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{u_1}{1-r}.$$

Exemplo 5.3.2 Como primeiro exemplo de aplicação desta teoria, vamos estudar a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}.$$

Trata-se de uma série geométrica convergente, já que, tomando $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$, se tem $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{3}$ e $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$. O primeiro termo é aqui $u_2 = \dfrac{8}{3}$, pelo que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = \frac{8}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 8.$$

Um segundo exemplo envolvendo uma simplificação de radicais:

Exemplo 5.3.3 Com esta teoria tentemos escrever o número $x = \sqrt[4]{3\sqrt[4]{3\sqrt[4]{3\sqrt[4]{3\ldots}}}}$ utilizando um único símbolo de radical:

$$x = \sqrt[4]{3}\sqrt[4]{\sqrt[4]{3}}\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{3}}}\cdots = 3^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{16}}3^{\frac{1}{4^3}}\ldots = 3^{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4^n}}.$$

Trata-se da série de primeiro termo $\dfrac{1}{4}$ e razão $\dfrac{1}{4}$, portanto convergente e de soma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3},$$

pelo que

$$x = \sqrt[4]{3\sqrt[4]{3\sqrt[4]{3\sqrt[4]{3\ldots}}}} = \sqrt[3]{3}.$$

Aplicação 5: Rendas financeiras perpétuas de termos constantes

Valor atual Vimos que o valor atual de uma renda de termos constantes C_0 a ser paga no final de cada período durante N períodos tem um valor atual de

$$\frac{C_0}{1+i} + \frac{C_0}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_0}{(1+i)^N}.$$

Se considerarmos que a renda é perpétua, o seu valor atual através da soma da série de primeiro termo $C_1 = \dfrac{C_0}{1+i}$ e razão $r = \dfrac{1}{1+i}$, notemos que se trata de uma série convergente já que (para uma taxa de juro positiva!) $0 < r < 1$. Obtém-se o resultado

$$C_\infty = \frac{C_1}{1 - \dfrac{1}{1+i}} = \frac{C_0}{i}.$$

5.3.1 Exercícios

Exercício 5.3.1 Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim \left(\dfrac{n+3}{n}\right)^n$ (b) $\lim \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$ (c) $\lim \left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^2}$

(d) $\lim \left(\dfrac{4n+1}{7n+2}\right)^n$ (e) $\lim \left(\dfrac{5n^2+6+n}{2n^2-13}\right)^{3n}$ (f) $\lim \left(\dfrac{n^2-3n^5+2}{4n^3+n^5-15}\right)^{2n-1}$

Exercício 5.3.2 Calcule:

(a) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5^2}+\dfrac{2}{5^3}+\dots$

(b) $27+9+3+1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\dots$

(c) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}-\dots$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}+\dots$

Exercício 5.3.3 Estude a convergência de cada uma das seguintes séries geométricas e calcule, quando possível, a respetiva soma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^{n+1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7^{n+1}}{5^{n-1}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\times 6^{n+1}}{9^{n-2}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3\cos(n\pi)5^{-n+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{7\times 5^n}{3^{2n+2}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\times 5^{2n-1}}{3^{4n}}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2^n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e\pi)^{n-2}}{3^{2n-1}}$

Exercício 5.3.4 Exprima os seguintes números racionais como soma de uma série geométrica convergente e escreva-os na forma $\dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{N}$.

(a) $0,77777\dots$

(b) $0,52525252\dots$

(c) $0,123123123\dots$

(d) $0,811111\dots$

Exercício 5.3.5 Recorrendo à soma de uma série geométrica convergente, escreva os seguintes números reais na forma a^b com $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{Q}$.

(a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}}$

(b) $\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\ldots}}}}$

Exercício 5.3.6 Uma família americana dos anos sessenta dispõe de um capital de 10.000 dólares que pretende investir durante um ano. Qual das seguintes três opções é a mais proveitosa?

(a) Juro de 20% ao ano com capitalização anual;
(b) Juro de 19% ao ano com capitalização trimestral;
(c) Juro de 15% ao ano com capitalização mensal;
(d) Juro contínuo de 20% ao ano.

Exercício 5.3.7 Calcule a taxa de juro efetiva para cada um dos casos seguintes:

(a) Juro nominal de 5% ao ano com capitalização bimensal;
(b) Juro nominal de 4% ao ano com capitalização mensal;
(c) Juro nominal de 3% ao ano com capitalização trimestral;
(d) Juro nominal de 6% ao ano com capitalização semestral;
(e) Juro nominal contínuo de 2% ao ano.

Exercício 5.3.8 Calcule a taxa de juro nominal anual em cada um dos casos seguintes:

(a) Juro efetivo de 5% ao fim de um periodo de um ano, com capitalizações bimensais;
(b) Juro efetivo de 8% ao fim de um periodo de dois anos, com capitalizações mensais;
(c) Juro efetivo de 2% ao fim de um periodo de um ano, com capitalizações trimestrais;
(d) Juro efetivo de 11% ao fim de um periodo de quatro anos, com capitalizações semestrais;
(e) Juro efetivo de 3% ao fim de um periodo de dois anos, com capitalização contínua.

Exercício 5.3.9 Qual seria, ao fim de um ano, o valor de um depósito a prazo com juro anual de 100 com capitalizações diárias e valor inicial de 200 euros? Deduza uma aproximação do número de Neper e.

Exercício 5.3.10 Considere um depósito de C_0 $u.m.$ que ao fim de um ano em regime de juros contínuos rendeu 4,2Q̇ual a taxa anual de juro aplicada?

Exercício 5.3.11 Calcule o montante a investir num projeto com um retorno de $1000\%u.m$ dentro de 5 anos e um regime de juro contínuo de 10% ao ano.

Exercício 5.3.12 Calcule o valor atual de uma renda perpétua anual de $40\%u.m.$ à taxa de juro de 2% ao ano.

Exercício 5.3.13 Um empresa vai iniciar a exploração de uma reserva de um mineral utilizado no fabrico de baterias para a indústria automóvel. A reserva, de onde serão extraídas 500 mil toneladas no primeiro ano de exploração, contém 10 milhões de toneladas do mineral. Supondo que a taxa de extração do mineral terá uma redução anual de 10%, mostre que a reserva do mineral não se esgotará.

Exercício 5.3.14 Um certo recurso não renovável vai ser explorado por uma companhia mineira. Qual deve ser a reserva mínima deste recurso por forma a que se possa extrair no primeiro ano 6 mil toneladas e reduzir a mineração em 20% em cada ano subsequente sem nunca esgotar o minério?

Exercício 5.3.15 Aquando do nascimento do seu primeiro filho, um pai abriu uma conta bancária na qual foi depositando anualmente C_0 unidades monetárias. Sabendo que a conta é remunerada com uma taxa de $r = p\%$ ao ano, mostre que o respetivo saldo, ao fim de n anos, e antes de efetuado esse depósito anual, é de

$$S_n = \frac{C_0}{r}(1+r)((1+r)^n - 1).$$