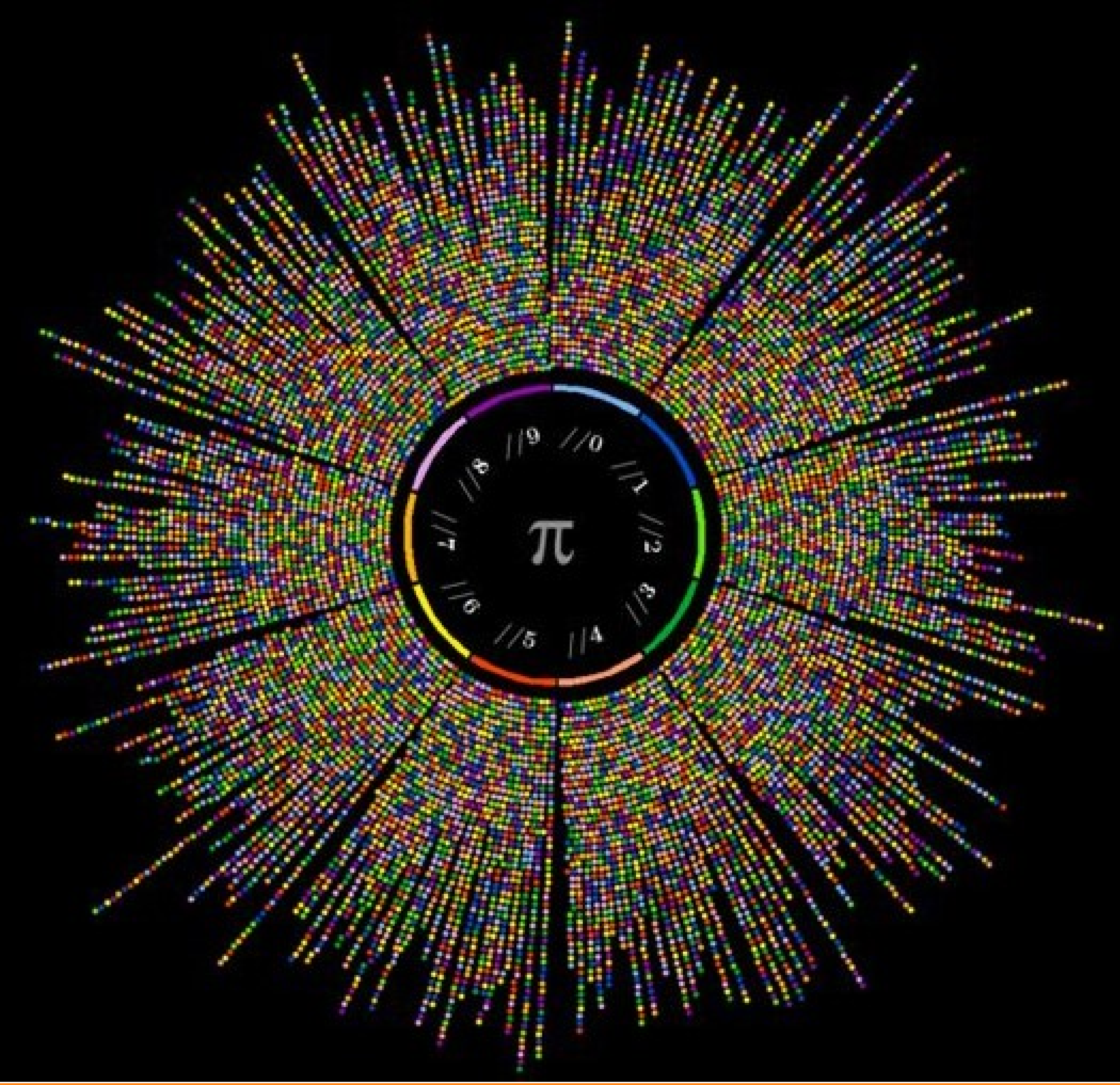

Matemática 1 - Exercícios

2024-2025

ISEG
Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Indice

1 Introdução à Álgebra Linear

1.1 Subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$

✍ **Exercício 1.1**

Considere o vetor $v = (2, 4, -3)$. Determine se v pertence aos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

(a) $V_1 = \text{span}\,\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$;
(b) $V_2 = \text{span}\,\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$;
(c) $V_3 = \text{span}\,\{(2, 0, 0), (1, 3, 0), (1, 1, 1)\}$;
(d) $V_4 = \text{span}\,\{(1, 1, 1), (2, 0, 2), (3, 1, 3)\}$.

✍ **Exercício 1.2**

Averigue se as seguintes famílias de vetores são linearmente independentes:

(a) $\underline{a} = \{(-2, 4), (1, -2)\}$;
(b) $\underline{b} = \{(2, 1), (-6, -3)\}$;
(c) $\underline{c} = \{(2, 3), (3, 2)\}$;
(d) $\underline{d} = \{(0, 0, 3), (0, 1, 1), (2, 0, 1\}$;
(e) $\underline{e} = \{(2, 0, 0, 0), (1, 3, 0, 0), (4, 2, 1, 0), (2, 1, 2, 1)\}$;
(f) $\underline{f} = \{(1, 1, 1, 1), (0, -2, 3, 5), (3, 3, 3, 3), (1, 2, 2, -7)\}$.

✍ **Exercício 1.3**

Seja $\underline{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ uma família de p vetores de $\mathbb{R}^n$ não nulos e dois a dois ortogonais.

(a) Mostre que a família $\underline{u}$ é linearmente independente.
(b) Aplicação: mostre que a família $\underline{u} = \{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (-3, 0, 3, 0)\}$ é linearmente independente.

✍ **Exercício 1.4**

Discuta, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a independência linear das seguintes famílias de vetores:

(a) $\underline{u} = \{(3, -1), (1, 1 + \lambda)\}$;
(b) $\underline{v} = \{(1, 2, 3), (-2, \lambda, -6)\}$.

✍ **Exercício 1.5**

Considere uma família $\underline{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$. Mostre que a família formada pelos vetores $v_1 = 2u_1$, $v_2 = u_1 + u_2$ e $v_3 = u_1 + 3u_3$ é também linearmente independente.

✍ **Exercício 1.6**

Mostre que os seguintes conjuntos são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ e determine uma base e a dimensão da cada um:

(a) $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = y\}$;
(b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3x = 2z\}$;
(c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = 2y = 3z\}$;

(d) $V_4 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x = y \wedge z = -w\}$;
(e) $V_5 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x = y = z\}$;
(f) $V_6 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x = z \wedge w = 0\}$.

✍ **Exercício 1.7**
Seja **0** o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$.
(a) Mostre que se V for um espaço vetorial se tem necessariamente $\mathbf{0} \in V$.
(b) O conjunto $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x = 3y \wedge 2z = 1 + w\}$ é um espaço vetorial? Justifique.

✍ **Exercício 1.8**
Considere os vetores $u_1 = (3, 5)$ e $u_2 = (1, 1)$.
(a) Mostre que $\{u_1, u_2\}$ é uma família linearmente independente.
(b) Justifique que $\{u_1, u_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.
(c) Determine as coordenadas do vetor $v = (-2, 1)$ na base $\{u_1, u_2\}$.

✍ **Exercício 1.9**
Averígue quais das seguintes famílias formam bases de $\mathbb{R}^3$ e calcule as coordenadas do vetor $v = (1, 1, 1)$ nessas bases.
(a) $\underline{a} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$;
(b) $\underline{b} = \{(2, 0, 0), (4, 1, 0), (2, -2, 2)\}$;
(c) $\underline{c} = \{(1, 3, 0), (4, 2, 1)\}$;
(d) $\underline{d} = \{(1, 3, 0), (2, 6, 0), (0, 0, 1)\}$;
(e) $\underline{e} = \{(1, 3, 0), (4, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 1, 1)\}$;
(f) $\underline{h} = \{(3, 1, 0), (0, 0, 1), (3, 1, 2)\}$;
(g) $\underline{i} = \{(0, 2, 2), (1, 2, 0), (1, -1, 1)\}$.

1.2 Matrizes

✍ **Exercício 1.10**
Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Indique quais das seguintes operações estão definidas e calcule, se for o caso, a matriz resultante:

(a) $3A$
(b) $A + B$
(c) $B + C$
(d) $4C - 2D$
(e) AC
(f) $(CD)^T$
(g) $(2A)(5C)$
(h) A^2
(i) $(AC)^2$
(j) $(2A - BD)$
(k) $A^T A$
(l) $BC - CB$.

✍ **Exercício 1.11**
Determine os valores do parâmetro real α para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2 - 1 & -3 \\ \alpha + 1 & 2 & \alpha^2 + 4 \\ -3 & 4\alpha & -1 \end{bmatrix}$$

é simétrica.

✍ Exercício 1.12

Sejam A, B e C matrizes quadradas de mesma dimensão. Indique quais das seguintes proposições são necessariamente verdadeiras e forneça um contra-exemplo para as restantes.

(a) $A = B \Rightarrow AC = BC$.
(b) $AB = BA$.
(c) $AC = BC \Rightarrow A = B$.
(d) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$.
(e) $A + C = B + C \Rightarrow A = B$.
(f) $A^2 = I \Rightarrow A = \pm I$.

✍ Exercício 1.13

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Explicite as dimensões das seguintes matrizes:

(a) A^T (b) AA^T (c) $A^T A$.

✍ Exercício 1.14

Seja A uma matriz quadrada tal que $A^T = 4A$. Mostre que A é a matriz nula.

✍ Exercício 1.15

Sejam $(L_i)_{1\leq i\leq n}$ e $(C_j)_{1\leq j\leq m}$ as famílias dos vetores linha e dos vetores coluna de uma dada matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Mostre que se estas famílias forem ambas linearmente independentes, A é uma matriz quadrada.

✍ Exercício 1.16

Determine a característica das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -6 & -12 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & -6 & 19 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & -12 & 20 \\ 3 & -9 & 15 \\ 2 & -6 & 10 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

✍ Exercício 1.17

Determine uma base do espaço vetorial gerado pelos vetores coluna das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 19 \end{bmatrix}$

Exercício 1.18
Discuta a característica das seguintes matrizes em função do parâmetro $t \in \mathbb{R}$:

(a) $\begin{bmatrix} t & 0 & t^2-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & t & t-1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} t+3 & 5 & 6 \\ -1 & t-3 & -6 \\ 1 & 1 & t+4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-t \end{bmatrix}$

Exercício 1.19
Determine uma base dos seguintes espaços vetoriais:
(a) $V_1 = \text{span}\,\{(1,2,4),(2,3,5),(1,1,1)\}$.
(b) $V_2 = \text{span}\,\{(1,2,4,5,1),(2,3,5,7,1),(3,5,9,12,2),(1,0,1,0,1)\}$.
(c) $V_3 = \text{span}\,\{(1,-2,3,4,5),(2,-3,4,5,6),(-1,0,1,2,3)\}$.

1.3 Inversão de matrizes

Exercício 1.20 Considere, para $a, b \in \mathbb{R}$, as matrizes

$$A = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 16 & -8 & -8 \\ a & 2 & b \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sabe-se que $B = A^{-1}$. Determine os valores de a e de b.

Exercício 1.21
Mostre que as seguintes matrizes são invertíveis e calcule a respetiva matriz inversa:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Exercício 1.22
Mostre que uma matriz diagonal é invertível se e só se nenhum elemento da diagonal for nulo.

Exercício 1.23
Seja A uma matriz quadrada tal que $5AA^T + 2A + 5I = 0$.
Mostre que A é invertível.

✍ **Exercício 1.24**
Para cada matriz A, efetue o cáculo indicado. Deduza que A é invertível e explicite A^{-1}.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A^2 + A$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 - A$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A^2 - 6A + 9I$.

1.4 Determinantes

✍ **Exercício 1.25** Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule A^{-1} e B^{-1}.

(b) Calcule o determinante das matrizes A, B, A^T, B^T, $2A$, $3B$, AB, BA, A^{-1}, B^{-1} e $A^{-1}B$. Identifique as propriedades do determinante que estes cálculos ilustram.

✍ **Exercício 1.26**
Seja A uma matriz quadrada de ordem 4 com $\det(A) = 2$. Calcule

(a) $\det(A^2)$

(b) $\det(3A)$

(c) $\det(-A^{-1})$

(d) $\det(2A^T)$

(e) $\det(AA^TA^{-1})$

(f) $\det\left(\frac{1}{2}A^4\right)$.

✍ **Exercício 1.27**
Considere uma matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertível. Mostre que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

✍ **Exercício 1.28**
Considere a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & a & a \\ b & b & b & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, onde a e b são dois parâmetros reais.

Sabe-se que $\det(C) = 5$. Calcule o determinante da matriz $D = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ -2a & 2a & 2a & 2a \\ 7b & 7b & 7b & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

✍ **Exercício 1.29**
Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

✍ **Exercício 1.30**

Calcule os determinantes das seguintes matrizes em função dos parâmetros reais a, b e c:

(a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ b & 0 & a & a \\ 0 & b & a & a \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{bmatrix}$

✍ **Exercício 1.31**

Determine para que valores do parâmetro real λ as seguintes matrizes são invertíveis:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

1.5 Sistemas Lineares

✍ **Exercício 1.32**

Para cada um dos seguintes sistemas lineares:

(1) Explicite a matriz ampliada correspondente e reduza-a a uma matriz em escada;
(2) Classifique o sistema e determine, se pertinente, o respetivo número de graus de liberdade;
(3) Resolva explicitamente o sistema.

(a) $\begin{cases} -2x-3y+z=3 \\ 4x+6y-2z=1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=0 \\ y+2z=1 \\ 2x+y+4z=2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x-y+2z+w=1 \\ 2x+y-z+3w=3 \\ x+5y-8z+w=1 \\ 4x+5y-7z+7w=7 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+3y+2z+4w=0 \\ 2x+y-w=1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x+y-z+w=2 \\ 2x-y+z-3w=1. \end{cases}$

✍ Exercício 1.33

Classifique os sistemas seguintes em função dos parâmetros reais a e b:

(a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ 2x-2y+az=2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y=a \\ x+2y=a^2 \\ x+3y=a^3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} ax+z=2 \\ x+y+z=2 \\ 3x+y+3z=6 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ z-y+2z=a \\ 2x+bz=2 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 2x+y=b \\ 3x+2y+z=0 \\ x+ay+z=2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} by+az=1 \\ y+az=0 \\ x+by=0 \end{cases}$

✍ Exercício 1.34

Seja A uma matriz quadrada.

(a) Mostre que $\ker(A) \subset \ker(A^2)$.

(b) Deduza que $\mathrm{c}(A^2) \leq \mathrm{c}(A)$.

✍ Exercício 1.35

Mostre que as famílias seguintes formam uma base de V e explicite as coordenadas do vetor v nessa mesma base.

(a) $\underline{d} = \{(1,1,1),(0,3,5),(2,1,-1)\}$, $V=\mathbb{R}^3$, $v=(7,-2,-12)$.

(b) $\underline{e} = \{(1,2,1),(3,5,2),(-1,1,-1)\}$, $V=\mathbb{R}^3$, $v=(4,10,3)$.

(c) $\underline{f} = \{(1,1,1,1),(1,0,2,2),(0,3,1,4),(1,1,0,1)\}$, $V=\mathbb{R}^4$, $v=(7,14,8,21)$.

(d) $\underline{g} = \{(1,3,1,0,1),(1,2,2,2,-1),(0,3,1,4,-2),(1,1,0,1,0),(1,-1,1,-1,1)\}$, $V=\mathbb{R}^5$, $v=(4,9,2,8,-1)$.

✍ Exercício 1.36

Determine uma base do núcleo das seguintes matrizes e deduza as respetivas características.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

✍ Exercício 1.37

Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 2x-y+z=6 \\ x-y-3z=-3. \end{cases}$$

é de Cramer e determine a respetiva solução.

✍ Exercício 1.38

Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x+z=2 \\ y+z=1. \end{cases}$$

é de Cramer e determine o valor da incógnita z da solução.

✍ **Exercício 1.39**

Mostre que, independentemente dos valores dos parâmetros reais a, b e c, o sistema

$$\begin{cases} 3x + y = a \\ x - y + 2z = b \\ 2x + 3y - z = c \end{cases}$$

é possível e determinado e calcule a respetiva solução de duas formas:

(a) Utilizando as fórmulas ditas de Cramer;

(b) Começando por calcular a matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

1.6 Modelos input-output

✍ **Exercício 1.40**

Duas oficinas automóveis, especializadas respetivamente em motores (M) e em embraiagens (E), utilizam frequentemente os serviços uma da outra. Para produzir trabalho no valor de um 1 euro, a oficina M utiliza os seus próprios recursos num valor de $0,5$ euros e 25 cêntimos de serviços da oficina E. Por seu lado, para vender 1 euro, a empresa E utiliza 10 cêntimos do seu próprio trabalho e 25 cêntimos em serviços da oficina M.

(a) Construa a matriz de consumo desta economia. Trata-se de uma economia rentável?

(b) Quanto devem produzir, em euros, cada uma destas empresas sabendo que existe uma procura externa de 7000 euros em trabalho para a oficina M e de 14000 euros para a oficina E?

✍ **Exercício 1.41**

Uma pequena loja de uma aldeia do século XIX vende água potável e lenha. O negócio consiste em recolher estes bens em dois locais distantes (um rio e uma floresta) e trazê-los para a aldeia. Cada viagem dura vários dias: os trabalhadores da loja precisam de beber enquanto estão em marcha e utilizar lenha durante as noites para se aquecerem.

Por cada litro de água recolhida no rio, os trabalhadores consomem durante a viagem $0,2$ litros de água e $0,3$ quilos de lenha.

Por cada quilo de lenha recolhida, os trabalhadores bebem $0,4$ litros de água e consomem $0,1$ quilos de lenha.

A aldeia necessita todos os meses de 2000 litros de água e 100 quilos de lenha. Quanta lenha e quanta água devem os trabalhadores recolher mensalmente?

✍ **Exercício 1.42**

Uma empresa tem 3 departamentos, cada um deles especializado na produção de um tipo de energia: Petróleo (P), Eletricidade (E) e Gás Natural (G).

- Para produzir uma unidade de Petróleo são necessárias:
  $0,2$ unidades de Gás Natural e $0,2$ unidades de Eletricidade;
- Para produzir uma unidade de Eletricidade são necessárias: $0,1$ unidades de Petróleo, $0,2$ unidades de Gás Natural e $0,1$ unidades de Eletricidade.

- Para produzir uma unidade de Gás Natural são necessárias: $0,2$ unidades de Petróleo, $0,1$ unidades de Gás Natural e $0,3$ unidades de Eletricidade.

(a) Construa a matriz de consumo desta empresa. Trata-se de uma empresa rentável?

(b) Quanto deve a empresa produzir para satisfazer uma procura externa de 450 unidades de Petróleo, 400 unidades de Gás Natural e 430 unidades de Eletricidade?

Exercício 1.43

A economia de uma país imaginário decompõe-se em três setores: agricultura, serviços e energia. Para poder funcionar, cada um necessita de utilizar parte da produção dos 3 setores, segundo a seguinte tabela:

	Agricultura	Serviços	Eletricidade
Produzir 1 unidade agrícula consome:	40%	30%	50%
Produzir 1 unidade de serviços consome:	30%	10%	50%
Produzir 1 unidade energética consome:	30%	60%	0%

Supõe-se que a economia deste país é fechada, ou seja, não existe procura externa. Sabendo que a produção energética é de 10000 unidades, qual deve ser a produção dos restantes setores para que esta economia auto-subsista sem desperdícios?

1.7 Soluções dos Exercícios

1. a) $v \in V_1$. b) $v \notin V_2$. c) $v \in V_3$. d) $v \notin V_4$.

2. a) Não. b) Não. c) Sim. d) Sim. e) Sim. f) Não.

3. a) Sugestão: faça o produto escalar de u_1 por uma combinação linear nula da família $\underline{u}$. Repita p vezes.
   b) Sugestão: verifique que os vetores dados são dois a dois ortogonais.

4. a) $\underline{u}$ é L.I. se $\lambda \neq -4/3$. b) $\underline{v}$ é L.I. se $\lambda \neq -4$.

5. —
6. a) Base: por exemplo, $\{(1,1)\}$; dim(V_1) = 1.
   b) Base: por exemplo, $\{(1,0,3/2),(0,1,0)\}$; dim(V_2) = 2.
   c) Base: por exemplo, $\{(1,1/2,1/3)\}$; dim(V_3) = 1.
   d) Base: por exemplo, $\{(1,1,0,0),(0,0,1,-1)\}$; dim(V_4) = 2.
   e) Base: por exemplo, $\{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}$; dim(V_5) = 2.
   f) Base: por exemplo, $\{(1,0,1,0),(0,1,0,0)\}$; dim(V_6) = 2.
7. —
8. a) —
   b) —
   c) $v_{\{u_1,u_2\}} = (3/2, -13/2)$.

9. a) $v_{\underline{a}} = (1/2, 1/2, 1/2)$.
   b) $v_{\underline{b}} = (-4, 2, 1/2)$.
   c) —
   d) —
   e) —
   f) —
   g) $v_{\underline{g}} = (1/4, 1/2, 1/2)$.

10. a) $3A = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A + B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

c) —

d) $4C - 2D = \begin{bmatrix} -4 & 14 \\ 8 & 6 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}$

e) $AC = \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

f) —

g) $(2A)(5C) = 10AC = \begin{bmatrix} -60 & -70 \\ 50 & 30 \end{bmatrix}$

h) —

i) $(AC)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 21 \\ -15 & -26 \end{bmatrix}$

j) —

k) $A^TA = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

l) —

11. $\alpha = 2$.
12. a) Verdade.

b) Falso. Contra-exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

c) Falso. Contra-exemplo: $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

d) Falso. Contra-exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0; AB = 0$.

e) Verdade.

f) Falso. Contra-exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

13. a) $A^T \in \mathcal{M}_{m\times n}$. b) $AA^T \in \mathcal{M}_{n\times n}$. c) $A^TA \in \mathcal{M}_{m\times m}$.

14. —
15. $C(A) = n$ e $C(A) = m$, logo $n = m$.

16. a) $C(A) = 2$. b) $C(B) = 2$. c) $C(C) = 3$. d) $C(D) = 3$. e) $C(E) = 3$. f) $C(F) = 3$. g) $C(G) = 2$. h) $C(H) = 1$. i) $C(I) = 4$.

17. Exemplos de possíveis bases:

a) Base: $\{(6,1,3),(3,2,2),(-4,5,1)\}$.
b) Base: $\{(0,1,1),(1,2,-3),(3,-4,2)\}$.
c) Base: $\{(4,1,2),(3,1,3)\}$.
d) Base: $\{(1,-1,0,1),(0,1,1,4),(0,0,4,3),(0,0,0,1)\}$.
e) Base: $\{(1,-1,0,1),(0,1,1,4),(0,0,-1-8)\}$.
f) Base: $\{(1,2,3),(0,-1,-2),(0,0,10)\}$.

18. a) $C(A) = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad t \in \{-1,2\} \\ 3, & \text{se} \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,2\} \end{cases}$.

b) $C(B) = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad t \in \{-4,-2,2\} \\ 3, & \text{se} \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{-4,2,2\} \end{cases}$.

c) $C(C) = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad t \in \{-1,2\} \\ 3, & \text{se} \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,2\} \end{cases}$.

19. Exemplos de possíveis bases: a) Base: $\{(1,2,4),(0,-1,-3)\}$.
b) Base: $\{(1,2,4,5,1),(0,-1,-3,-3,-1),(0,0,3,1,2)\}$.
c) Base: $\{(1,-2,3,4,5),(0,1,-2,-3,-4)\}$.
20. $a = -6, b = 6$.
21. a) $\begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -1 \\ -1 & 7/2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} -2 & 4/5 & 9/5 \\ 3 & -4/5 & -14/5 \\ -1 & 1/5 & 6/5 \end{bmatrix}$;

22. —
23. $A^{-1} = -A^T - \frac{2}{5}Id.$
24. (a)$A^2+A = 2I$: $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I)$; (b)$A^3-A = 4I$: $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2-I)$; (c) $A^2-6A+9I = 0$; $A^{-1} = \frac{1}{9}(6I-A)$.
25. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -1/14 & 2/7 \end{bmatrix}$.

    (b) $\det(A) = \det(A^T) = 1$; $\det(B) = \det(B^T) = 14$; $\det(2A) = 4 = 2^2\det(A)$; $\det(3B) = 126 = 3^2\det(B)$; $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B) = 14$; $\det(A^{-1}) = 1 = 1/\det(A)$; $\det(B^{-1}) = 1/14 = 1/\det(B)$; $\det(A^{-1}B) = 14 = \det(B)/det(A)$.
26. $\det(A^2) = 4$; $\det(3A) = 162$; $\det(-A^{-1}) = 1/2$; $\det(2A^T) = 32$; $\det(AA^TA^{-1}) = 2$; $\det(\frac{1}{2}A^4) = 1$.
27. —
28. -70;
29. (a) -4; (b) -2; (c) 2; (d) 4; (e) -9; (f) 7840; (g) -16.
30. (a) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca))$; (b) 0; (c) $(c-a)(c-b)(b-a)$; (d) $b^2(b^2-4a^2)$; (e) b^4+4ab^3.
31. (a)$\lambda \notin \{-2;1\}$;(b) $\lambda \neq 0$; (c)$\lambda \notin \{0;1;-1\}$; (d) $\lambda \neq 1$.
32. (a) Sistema impossível; (b) $(0,0,0)$; (c) $(1/4,1/2,1/4)$; (d) $x = -\frac{1}{3}z$, $y = \frac{5}{3}z$; $w = 1$, $z \in R$;
    (e) $x = -w+\frac{1}{3}$, $y = -w-\frac{1}{3}$, $z = -w-\frac{2}{3}$, $w \in R$; (f) $x = 1+\frac{2}{3}w$, $y = 1+z-\frac{5}{3}w$, $z, w \in R$.
33. (a) Possível indeterminado se $a = 2$; Possível determinado se $a \neq 2$;
    (b) Possível indeterminado se $a \in \{0;1\}$. Impossível caso contrário;
    (c) Possível determinado se $a \neq 1$; Possível indeterminado se $a = 1$;
    (d) Possível determinado se $b \neq 3$; Possível indeterminado se $b = 3$ e $a = 1$; Impossível se $b = 3$ e $a \neq 1$;
    (e) Possível determinado se $a \neq 1$; Possível indeterminado se $b = -2$ e $a = 1$; Impossível se $a = 1$ e $b \neq -2$;
    (f) Possível determinado se $a \neq 0$ e $b \neq 1$; Impossível caso contrário.

34. (a) Utilize a definição de ker; (b) Utilize o Teorema Fundamental da Álgebra Linear.
35. (a) $(1,-2,3)$; (b) $(2,1,1)$; (c) $(1,2,3,4)$; (d)$(1,-1,2,3,1)$.
36. (a) $x_1 = x_4-x_3, x_2 = x_4-x_3, x_3, x_4, x_5 \in R$; Base: por exemplo, $B = \{(-1,-1,1,0,0);(1,1,0,1,0);(0,0,0,0,1)\}$;
    (b) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; Base $B = \emptyset$;
    (c) $x_1 = x_3$; $x_2 = -2x_3$; $x_3 \in R$; Base: por exemplo, $B = \{(1,-2,1)\}$;
    (d) $x_1 = -2x_2 - 3x_3$; $x_2, x_3 \in R$; Base: por exemplo, $B = \{(-2,1,0);(-3,0,1)\}$.
37. $(1,-2,2)$
38. $z = 0$;
39. (a)—; (b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/10 & -1/5 \\ -1/2 & 3/10 & 3/5 \\ -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{bmatrix}$;

    $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{10}b - \frac{1}{5}c$; $y = -\frac{1}{2}a + \frac{3}{10}b + \frac{3}{5}c$; $z = -\frac{1}{2}a + \frac{7}{10}b + \frac{2}{5}c$.

2 Progressões Geométricas

2.1 Progressões Geométricas

✍ **Exercício 2.1** Calcule

(*a*) $\frac{2}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\dots$

(*b*) $27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\dots$

(*c*) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\dots$

(*d*) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{2}}+\dots$

✍ **Exercício 2.2** Estude a convergência de cada uma das seguintes séries geométricas e calcule, quando possível, a respetiva soma.

(*a*) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{4^{n+1}}$ (*b*) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{7^{n+1}}{5^{n-1}}$ (*c*) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\times 6^{n+1}}{9^{n-2}}$ (*d*) $\sum_{n=0}^{\infty}3\cos(n\pi)5^{-n+1}$

(*e*) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{7\times 5^{n}}{3^{2n+2}}$ (*f*) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2\times 5^{2n-1}}{3^{4n}}$ (*g*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2^n}$ (*h*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e\pi)^{n-2}}{3^{2n-1}}$

✍ **Exercício 2.3** Exprima os seguintes números racionais como soma de uma série geométrica convergente e escreva-os na forma $\frac{a}{b}$ com $a, b\in\mathbb{N}$.

(*a*) $0,77777\dots$

(*b*) $0,52525252\dots$

(*c*) $0,123123123\dots$

(*d*) $0,811111\dots$

✍ **Exercício 2.4** Recorrendo à soma de uma série geométrica convergente, escreva os seguintes números reais na forma a^b com $a\in\mathbb{N}$ e $b\in\mathbb{Q}$.

(*a*) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}}$

(*b*) $\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\dots}}}}$

✍ **Exercício 2.5** Uma família americana dos anos sessenta dispõe de um capital de 10.000 dolares que pretende investir durante um ano. Qual das seguintes três opções é a mais proveitosa?

- Juro de 20% ao ano com capitalização anual;
- Juro de 19% ao ano com capitalização trimestral;
- Juro de 15% ao ano com capitalização mensal.

Qual seria o retorno deste investimento com um juro contínuo de 20% ao ano?

✍ **Exercício 2.6** Qual seria, ao fim de um ano, o valor de um depósito a prazo com juro anual de 100% com capitalizações diárias e valor inicial de 200 euros? Deduza uma aproximação do número de Neper e.

✍ **Exercício 2.7** Considere um depósito de C_0 u.m. que ao fim de um ano em regime de juros contínuos rendeu 4,2%. Qual a taxa anual de juro aplicada?

✍ **Exercício 2.8** Calcule o montante a investir num projeto com um retorno de 1000 u.m dentro de 5 anos e um regime de juro contínuo de 10% ao ano.

✍ **Exercício 2.9** Calcule o valor atual de uma renda perpétua anual de 40 u.m. à taxa de juro de 2% ao ano.

✍ **Exercício 2.10** Um empresa vai iniciar a exploração de uma reserva de um mineral utilizado no fabrico de baterias para a indústria automóvel. A reserva, de onde serão extraídas 500 mil toneladas no primeiro ano de exploração, contém 10 milhões de toneladas do mineral. Supondo que a taxa de extração do mineral terá uma redução anual de 10%, mostre que a reserva do mineral não se esgotará.

✍ **Exercício 2.11** Um certo recurso não renovável vai ser explorado por uma companhia mineira. Qual deve ser a reserva mínima deste recurso por forma a que se possa extrair no primeiro ano 6 mil toneladas e reduzir a mineração em 20% em cada ano subsequente sem nunca esgotar o minério.

✍ **Exercício 2.12** Aquando do nascimento do seu primeiro filho, um pai abriu uma conta bancária na qual depositou imediatamente C_0 euros, valor que foi reforçando anualmente com depósitos sucessivos de também C_0 euros. Sabendo que a conta é remunerada com uma taxa de $r = p\%$ ao ano, mostre que o respetivo saldo, ao fim de n anos, e antes de efetuado esse depósito anual, é de

$$S_n = \frac{C_0}{r}(1+r)((1+r)^n - 1).$$

2.2 Soluções dos Exercícios

1. (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{81}{2}$; (c) $-\frac{1}{3}$; (d) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.
2. (a) $\frac{1}{4}$; (b) Divergente; (c) 2916; (d) $\frac{25}{2}$; (e) Convergente $\frac{7}{4}\left(\frac{5}{9}\right)^3$; (f) $\frac{875}{2916}$; (g) $\frac{2}{3}$; (h) $\frac{3}{e\pi(9-e\pi)}$.
3. (a) $\frac{7}{9}$; (b) $\frac{52}{99}$; (c) $\frac{41}{333}$; (d) $\frac{73}{90}$.
4. (a) 2; (b) $\sqrt[4]{7}$;
5. Melhor opção: juro de 19% ao ano com capitalização trimestral. Com juro contínuo de 20% ao ano, o retorno é de $10.000 \times e^{0.2} - 10.000 \approx 2214,03$ euros;
6. $200\left(1+\frac{1}{365}\right)^{361} \approx 542,91$ euros. Aproximação: $e \approx \left(1+\frac{1}{365}\right)^{361} \approx 2,71457$.
7. $i = \ln(1,042)$;
8. $1000e^{-0.5}$;
9. 2000;
10. —
11. $\sum_{n=1}^{\infty} 6.000 \times 0,8^{n-1} = 30.000$ toneladas.
12. —

3 Funções Trigonométricas Inversas

3.1 Funções Trigonométricas Inversas

✍ **Exercício 3.1** Calcule

(a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$; (b) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$; (c) $\arctan(1)$;

(d) $\arcsin(-1)$; (e) $\arctan(-1)$; (f) $\arccos(-1)$.

✍ **Exercício 3.2** Calcule

(a) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$; (b) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$; (c) $\tan(\arctan(e))$;

(d) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; (e) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$; (f) $\arctan(\tan(e))$.

✍ **Exercício 3.3** Calcule

(a) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$; (b) $\arcsin\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$; (c) $\arcsin\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

✍ **Exercício 3.4** Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões e apresente, para cada uma delas, uma expressão equivalente que não envolva funções trigonométricas.

(a) $\cos(\arcsin(x))$; (b) $\sin(\arccos(x))$; (c) $\tan(\arccos(x))$;

(d) $\cos(\arctan(x))$; (e) $\cos(2\arctan(x))$; (f) $\sin(2\arccos(x))$.

3.2 Soluções dos Exercícios

1. (a) $\pi/6$; (b) $\pi/3$; (c) $\pi/4$; (d) $-\pi/2$; (e) $-\pi/4$; (f) π.
2. (a) $1/2$; (b) $-\pi/2$; (c) e; (d) $\pi/3$; (e) $-\pi/6$; (f)$e-\pi$.
3. (a) $2\pi/3$; (b) $-\pi/6$; (c) $\pi/2$.
4. (a)$\sqrt{1-x^2}$; (b) $\sqrt{1-x^2}$; (c) $\sqrt{1-x^2}/x$; (d) $1/\sqrt{x^2+1}$; (e) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$; (f) $2x\sqrt{1-x^2}$.

4 Cálculo Diferencial

4.1 Função inversa

✍ **Exercício 4.1** De uma função bijetiva f sabe-se que $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f'(3) = 7$ e $f'(1) = 9$.
Calcule $(f^{-1})'(3)$.

✍ **Exercício 4.2** Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da função f^{-1} no ponto indicado, nos seguintes casos:

(a) $f(x) = x^3 + 3$, ponto $(4, 1)$;

(b) $f(x) = 2x^5 - x^3 + x + 1$, ponto $(1, 0)$;

(c) $f(x) = 5x^2e^{2x-4}$, ponto $(20, 2)$.

✍ **Exercício 4.3**
Considere a função ”seno hiperbólico” definida em $\mathbb{R}$ pela expressão

$$f(x) := \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Justifique que $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma bijeção e obtenha uma expressão para a respetiva função inversa ”argsinh”.

(b) Obtenha uma expressão para argsinh$'$ e calcule argsinh$'(0)$.

(c) Calcule de novo argsinh$'(0)$ utilizando desta vez o Teorema da função inversa.

✍ **Exercício 4.4** Considere a função $f \, : \, x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \dfrac{x+2}{x-3}$.

(a) Mostre que f é invertível e que para todo o $x \neq 1$, $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$.

(b) Utilizando a alínea anterior mostre que para todo o $x \neq 1$, $(f^{-1})'(x) = -\dfrac{5}{(x-1)^2}$.

(c) Obtenha novamente a expressão de $(f^{-1})'(x)$ utilizando desta vez o teorema de derivação da função inversa.

4.2 Polinómios de Taylor e Aplicações

✍ **Exercício 4.5** Considere as funções definidas pelas expressões
$f(x) = e^x$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $h(x) = \ln(x)$, e $i(x) = \sqrt{x}$.

(a) Calcule os polinómios de Taylor de ordens $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$ de:

(i) f, centrados no ponto $a = 0$;

(ii) g, centrados no ponto $a = 1$;

(iii) h, centrados no ponto $a = 1$;

(iv) i, centrados no ponto $a = 16$.

(b) Trace (com uma calculadora ou um computador) o gráfico de cada uma destas funções e dos gráficos dos respetivos polinómios de Taylor de ordens 1 e 2.

(c) Utilize os polinómios de segunda ordem obtidos na primeira alínea para obter aproximações de

$$\ln(1,1); \qquad \sqrt[10]{e}; \qquad \frac{1}{\sqrt{0,8}}; \qquad \sqrt{17}.$$

Verifique com uma calculadora a qualidade destas aproximações.

Nota: Na verdade, a simples utilização do polinómio de Taylor para efetuar uma estimativa pontual não é suficiente para aferir a precisão da mesma. Em contra-partida, a utilização da fórmula de Taylor, objeto dos próximos exercícios, permite majorar o erro efetuado neste tipo de aproximações.

✍ **Exercício 4.6** Considere a função i definida por $i(x) = \sqrt{x}$.

(*a*) Obtenha uma aproximação de $\sqrt{17}$ com a ajuda do polinómio de Taylor de ordem 1 (a aproximação linear) centrado em $a = 16$ da função i.

(*b*) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 centrada em $a = 16$ para a função i.

(*c*) Mostre que o erro cometido com a aproximação linear obtida para $\sqrt{17}$ na alínea (a) não excede $\frac{1}{512}$.

✍ **Exercício 4.7** Considere as funções f e g definidas por $f(x) = e^x$ e $h(x) = \ln(x)$.

(*a*) Explicite a fórmula de Taylor de ordem 2 centrada em $a = 0$ para a função f.

(*b*) Explicite a fórmula de Taylor de ordem 2 centrada em $a = 1$ para a função h.

(*c*) Utilizando as alíneas anteriores, majore o erro cometido no Exercício 4.5 nas aproximações de segunda ordem de $\sqrt[10]{e}$ e de $\ln(1,1)$.

✍ **Exercício 4.8** Determine o polinómio de MacLaurin de ordem n das funções definidas pelas seguintes expressões:

(*a*) e^{3x} (*b*) $\ln(1 + 2x)$ (*c*) $\sinh(2x)$ (*d*) $\sqrt{x + 1}$

4.3 Pontos críticos e concavidade

✍ **Exercício 4.9** Determine os pontos críticos das seguintes funções e, para cada um deles, averigue se se trata de um minimizante local, de um maximizante local ou de um ponto de sela.

(*a*) $4x^3 - 8x - 12$ (*b*) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ (*c*) $x(x - 3)^2 + 4$

(*d*) $x + \frac{1}{x}$ (*e*) $x^3 - \frac{2}{x}$ (*f*) $\frac{x}{e^x}$

(*g*) $\frac{x}{3^x}$ (*h*) $\frac{x}{1 - x^2}$ (*i*) xe^x

(*j*) $x\ln(x)$ (*k*) $e^x(x^2 - 1)^3$ (*l*) $e^{2x-1}(x^2 - 3)^2$

✍ **Exercício 4.10** Estude as concavidades e localize os pontos de inflexão das funções definidas pelas expressões

(*a*) $5x - x^2$ (*b*) $x^2 - 4x + 2$

(*c*) $3x - x^5$ (*d*) $(x^2 - 9)^3$ (*e*) $\frac{x}{x^2 + 4}$

(*g*) xe^x (*h*) e^{-3x^2} (*i*) $\ln(1 - x^2)$

(*k*) $x\arctan(x)$ (*l*) $|2x^2 + 9x - 5|$

4.4 Limites

✍ **Exercício 4.11** Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{e^{\sin(x)} - e^{\cos(x)}}{\sin(x) - \cos(x)}$

(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(ex) - 1}{\sin(3x - 3)}$

(c) $\lim_{y\to 0} \dfrac{5y}{\tan(2y)}$

(d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\ln(2x - 5)}{x^2 - 9}$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)},\ a, b \in \mathbb{R}$

(f) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}{\arctan(t)}$

(g) $\lim_{y\to 0} \dfrac{1 - \cos(\alpha y)}{1 - \cos(\beta y)},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(h) $\lim_{r\to 1} \dfrac{\sqrt[5]{r} - 1}{\sqrt[3]{r} - 1}$

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos(2x)}{\sin(5x)}$

(j) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

(k) $\lim_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$

(l) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{xe^{3x}}\right)$

(m) $\lim_{y\to +\infty} y(2\arctan(3y) - \pi)$

(n) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{4x}}$

(o) $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \sin\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)^{\frac{x}{4}}$

(p) $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$

4.5 Soluções dos Exercícios

1. $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{9}$.
2. a) $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$; b) $y = x - 1$; c) $y = \dfrac{1}{60}x + \dfrac{5}{3}$.
3. a) $\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; b) $\operatorname{argsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; c) $\operatorname{argsinh}'(0) = 1$.
4. –
5. (a)
   (i) $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, $P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$.

   (ii) $P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$, $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{3}{8}(x - 1)^2 = \frac{15}{8} - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}x^2$,
   $P_3(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{3}{8}(x - 1)^2 - \frac{15}{48}(x - 1)^3$.

   (iii) $P_1(x) = x - 1$, $P_2(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 = -\frac{3}{2} + 2x - \frac{1}{2}x^2$,
   $P_3(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$.

   (iv) $P_1(x) = 4 + \frac{1}{8}(x - 16) = 2 + \frac{1}{8}x$, $P_2(x) = 4 + \frac{1}{8}(x - 16) - \frac{1}{512}(x - 16)^2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{16}x - \frac{1}{512}x^2$.
   $P_3(x) = 4 + \frac{1}{8}(x - 16) - \frac{1}{512}(x - 16)^2 + \frac{1}{98304}(x - 16)^3$.

   (c) $\ln(1.1) \approx 0.095$; $\sqrt[10]{e} \approx 1.105$; $\dfrac{1}{\sqrt{0.8}} \approx 1.115$; $\sqrt{17} \approx \dfrac{2111}{512}$.

6.

(a) $\dfrac{33}{8}$

(b) $\sqrt{x} = 4 + \dfrac{1}{8}(x-16) - \dfrac{1}{8c^{\frac{3}{2}}}(x-16)^2$, $c \in]16; x[$.

7.

(a) $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}e^c x^3$.

(b) $\ln(x) = x - 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3c^3}(x-1)^3$, $c \in]1; x[$.

(c) $e^{\frac{1}{10}} = 1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{6000}e^c$, $c \in]0; \frac{1}{10}[$. Assim $\left|e^{\frac{1}{10}} - \left(1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{200}\right)\right| \leq \dfrac{e^c}{6000} \leq \dfrac{e^{\frac{1}{10}}}{6000} \leq \dfrac{1}{4000}$,

onde se tomou, por exemplo, $e^{\frac{1}{10}} \leq 3^{\frac{1}{0}} \leq \dfrac{3}{2}$.

$\ln(1.1) = 0.1 - \dfrac{1}{2}0.1^2 + \dfrac{1}{3c^3}0.1^3$, $c \in]1; 1.1[$. Assim, $|\ln(1.1) - (0.1 - \dfrac{1}{2}0.1^2)| = \dfrac{0.1^3}{3c^3} \leq \dfrac{1}{3000}$.

8.

(a) $1 + 3x + \dfrac{3^2}{2!}x^2 + \dfrac{3^3}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{3^n}{3!}x^n$.

(b) $\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \dfrac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{2^n}{n}x^n + x^n\epsilon(x^n)$.

(c) Para n impar, $2x + \dfrac{2^3}{3!}x^3 + \dfrac{2^5}{5!}x^5 + \cdots + \dfrac{2^n}{n!}x^n$.
Para n par, o polinómio é idêntico ao de ordem $n-1$.

(d) $1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)}{2^n n!}x^n$.

9.

(a) $-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, maximizante local; $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, minimizante local;

(b) -1, maximizante local; 2, minimizante local;

(c) 1, maximizante local; 3, minimizante local;

(d) -1, maximizante local; 1, minimizante local;

(e) Sem pontos críticos;

(f) 1, maximizante local;

(g) $\dfrac{1}{\ln 3}$, maximizante local;

(h) Sem pontos críticos;

(i) -1, minimizante local;

(j) e^{-1}, minimizante local;

(k) $-3-\sqrt{10}$, maximizante local; $-3+\sqrt{10}$, minimizante local; 1 e -1, pontos de sela;

(l) 1 e -3, maximizantes locais; $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$, minimizantes locais.

10.

(a) Sem pontos de inflexão;

(b) Sem pontos de inflexão;

(c) 0;

(d) $3, -3, -\dfrac{3}{\sqrt{5}}, \dfrac{3}{\sqrt{5}}$;

(e) $-2\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}$;

(g) -2;
(h) $-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}$;

(i) Sem pontos de inflexão;

(k) Sem pontos de inflexão;

(l) -5 e $\dfrac{1}{2}$.

11. a) $e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$; b) $\dfrac{1}{3}$; c) $\dfrac{5}{2}$; d)$\dfrac{1}{3}$; e) $\dfrac{a}{b}$; f) 1; g) $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$; h) $\dfrac{3}{5}$; i) $\dfrac{1}{5}$; j) 0;
l) Não existe (os limites laterais são distintos); m) $-\dfrac{2}{3}$; n) 1; o) $\sqrt{e}$; p) $e^{-\frac{1}{6}}$.

5 Cálculo Integral

5.1 Cálculo de primitivas

✍ **Exercício 5.1** Calcule as primitivas das funções definidas pelas seguintes expressões:

(*a*) $4x^3 + x^2 - x + 1$;

(*b*) $\sin(3x) - \frac{1}{2}x^5 + \sqrt{x}$;

(*c*) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3}\cos(5x)$;

(*d*) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - e^{3x} - \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{5}e^{-2x}$;

(*e*) $\tan(x) + \frac{1}{1+x}$;

(*f*) $(2-4x)^5$;

(*g*) $\sin(x)e^{\cos(x)}$;

(*h*) $x^2e^{x^3} - x\cos(x^2)$;

(*i*) $x^2(x^3+1)^3$;

(*j*) $\frac{(1+\ln(x))^5}{x}$;

(*k*) $\frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}$;

(*l*) $\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1+e^{2x}}$;

(*m*) $\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} + \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$;

(*n*) $\sin^3(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x)$;

(*o*) $\frac{x+1}{x+3} + \frac{x+5}{x+7}$;

(*p*) $\frac{1}{1+4x^2} + \frac{1}{3+4x^2}$;

(*q*) $\frac{x^2+5x-2}{1+x^2}$;

(*r*) $\frac{x^2-7x+5}{9+x^2}$;

(*s*) $\frac{x}{\sqrt{2-5x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2-5x^2}}$;

(*t*) $\frac{x^4}{e^{x^5}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

✍ **Exercício 5.2**

a. Mostre que $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ e que $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

b. Deduza da alínea anterior que $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ e que $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.
Calcule $\int \cos^2(x)dx$ e $\int \sin^2(x)dx$.

c. Inspirando-se nas alíneas anteriores e utilizando o binómio de Newton, calcule

$$\int \cos^4(x)dx \text{ e } \int \sin^6(x)dx.$$

✍ **Exercício 5.3** Calcule as primitivas das seguintes funções recorrendo à fórmula de primitivação por partes:

(a) xe^{2x}; (b) $x^2\sin(2x)$;

(c) $(x^2+x+1)e^{3x}$; (d) $\arctan(3x)$;

(e) $\ln(x)$; (f) $\arccos(x)$;

(g) $\arccos(x)+\arcsin(x)$; (h) $\arctan(x)+\arctan(1/x)$;

(i) $e^x\sin(2x)$ (j) $e^{2x}\cos(x)$

(k) $\sqrt{x}\ln(x)$; (l) $\ln^2(x)$

(m) $x^2\arctan x$; (n) $x^3e^{x^2}$.

✍ **Exercício 5.4** Primitive as funções racionais definidas pelas seguintes expressões:

(a) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$; (b) $\dfrac{1}{(x^2-1)(x+2)}$;

(c) $\dfrac{x}{x^2+4}$; (d) $\dfrac{x^2+2}{(x+1)(x^2+1)}$;

(e) $\dfrac{x^3+3}{x^2-1}$; (f) $\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{x^2+1}$.

✍ **Exercício 5.5** Calcule as seguintes primitivas recorrendo à mudança de variável indicada:

(a) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$, $x=\tan(t)$; (b) $\displaystyle\int\frac{\tan(x)dx}{1+\cos(x)}$, $t=\cos(x)$;

(c) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-\sin(x))\cos(x)}$, $t=\sin(x)$; (d) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x}}$, $x=\ln(t^2-1)$;

(e) $\displaystyle\int\sqrt{4-x^2}dx$, $x=2\cos(t)$; (f) $\displaystyle\int\frac{tdt}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}$, com $t=x^\alpha$ ($\alpha\in\mathbb{R}$ a escolher).

✍ **Exercício 5.6** Considere as funções "cosseno hiperbólico" e "seno hiperbólico" definidas respetivamente por

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\ \text{ e }\ \sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

a. Mostre que para todo o $x\in\mathbb{R}$,

(a) $\cosh'=\sinh$ e $\sinh'=\cosh$;

(b) $\sinh(2x)=2\cosh(x)\sinh(x)$;

(c) $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$ (Relação Fundamental da Trigonometria Hiperbólica).

b. Recorrendo à mudança de variável $t=2\sinh(x)$ calcule

$$\int\sqrt{4+t^2}dt.$$

5.2 Integrais definidos

✍ **Exercício 5.7** Calcule geometricamente os seguintes integrais:

(*a*) $\int_0^3 (2x-4)dx$; (*b*) $\int_0^2 (4x-2)dx$;

(*c*) $\int_{-2}^3 [x]dx$; (*d*) $\int_{-1}^1 t\cos(t)dt$;

(*e*) $\int_1^0 [3x]dx$; (*f*) $\int_a^b xdx$.

✍ **Exercício 5.8** Calcule a área da região do plano delimitada pelas linhas de equações:

(*a*) $y = 9 - x^2$ e $y = x^2$; (*b*) $y = x^4 - 4x^2$ e $y = \sqrt{4 - x^2}$;

(*c*) $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt{x}$; (*d*) $y = \frac{1}{2}x,\ y = x$ e $y = x^2$.

✍ **Exercício 5.9**

Mostre que se f é contínua em $[a;b]$ e se $\int_a^b f(x)dx = 0$, então f possui pelo menos uma raiz em $[a;b]$.

✍ **Exercício 5.10** Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. Para $x \neq 0$ define-se a "média de f no intervalo $[0;x]$" por

$$M_f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

a. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 0} M_f(x)$.
b. Prove que M_f é constante se e só se f é constante.
c. Prove que o contradomínio de M_f está contido no de f.

✍ **Exercício 5.11** Seja, para $x > 0$, $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}e^{\frac{t^2+1}{t}}dt$. Mostre que $F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$.

✍ **Exercício 5.12** Para $t \in [0;1]$ considere $x = \arctan(t)$.

a. Mostre que $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ e que $\sin(x) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

b. Seja $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)}{(\tan(x)+1)(1+\sin^2(x))}dx$.

Procedendo à substituição $x = \arctan(t)$, mostre que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(1+2t^2)(t+1)}dt$.

c. Calcule I.

5.3 Integrais impróprios

✍ **Exercício 5.13** Calcule os seguintes integrais impróprios (ou mostre que são divergentes):

(*a*) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^3}$; (*b*) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

(*c*) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)dx}{x^2+1}$; (*d*) $\int_0^1 \ln(x)dx$;

(*e*) $\int_3^5 \frac{dx}{x-3}$; (*f*) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5.4 Um último desafio

✍ **Exercício 5.14** Considere, para $n \in \mathbb{N}_0$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

a. Calcule I_0 e I_1.

b. Mostre que para todo o $n \geq 2$,

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}.$$

c. Mostre que se $n = 2k$ é um número par ($k \in \mathbb{N}_0$),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \frac{\pi(2k)!}{2 \times 4^k (k!)^2}.$$

d. Obtenha uma expressão análoga para n ímpar.

5.5 Soluções dos Exercícios

1.

(a) $x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c$;

(b) $-\frac{\cos(3x)}{3} - \frac{1}{12}x^6 + \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3} + c$;

(c) $-\frac{1}{x} - 2\sqrt{x} - \frac{1}{15}\sin(5x) + c$;

(d) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{3}e^{3x} - 2\arctan(x) - \frac{1}{5}e^{-2x} + c$;

(e) $-\ln|\cos(x)| + \ln|1+x| + c$;

(f) $-\frac{1}{24}(2-4x)^6 + c$;

(g) $-e^{\cos(x)} + c$;

(h) $\frac{1}{3}e^{x^3} - \frac{1}{2}\sin(x^2) + c$;

(i) $\frac{1}{12}(x^3+1)^4 + c$;

(j) $\frac{(1+\ln(x))^6}{6} + c$;

(k) $\frac{\arctan^2 x}{2} + \ln|\arctan x| + c$;

(l) $\ln(1+e^x) + \arctan(e^x) + c$;

(m) $\ln|1+\sin(x)| + \arctan(\sin(x)) + c$;

(n) $\frac{1}{4}\sin^4(x) - \frac{\cos^2(x)}{2} + c$;

(o) $2x - 2\ln|(x+3)(x+7)| + c$;

(p) $\frac{1}{2}\arctan(2x) + \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right) + c$;

(q) $x + \frac{5}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan(x) + c$;

(r) $x - \frac{7}{2}\ln(x^2+9) - \frac{4}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c$;

(s) $-\frac{1}{5}\sqrt{2-5x^2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\arccos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right) + c$;

(t) $-\frac{e^{-x^5}}{5} - e^{\frac{1}{x}} + c$.

2. **b.**

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \sin^2(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

c.

$$\int \cos^4(x)dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \sin^6(x)dx = -2^{-5}\left(\frac{\sin(6x)}{6} - \frac{3\sin(4x)}{2} + \frac{15\sin(2x)}{2} + 10x\right) + c$$

3.

(a) $\dfrac{xe^{2x}}{2} - \dfrac{e^{2x}}{4} + c;$

(b) $-\dfrac{x^2\cos(2x)}{2} + \dfrac{x\sin(2x)}{2} + \dfrac{\cos(2x)}{4} + c;$

(c) $\dfrac{e^{3x}}{3}\left(x^2 + \dfrac{x}{3} + \dfrac{8}{9}\right) + c;$

(d) $x\arctan(3x) - \dfrac{\ln(1+9x^2)}{6} + c;$

(e) $x\ln(x) - x + c;$

(f) $x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + c;$

(g) $x(\arccos(x) + \arcsin(x)) + c;$

(h) $x(\arctan(x) + \arctan(1/x)) + c;$

(i) $\dfrac{e^x}{5}\Big(\sin(2x) - 2\cos(2x)\Big) + c;$

(j) $\dfrac{e^{2x}}{5}\Big(\sin(x) + 2\cos(x)\Big) + c;$

(k) $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln(x) - \dfrac{4}{9}\sqrt{x^3} + c;$

(l) $x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + c;$

(m) $\dfrac{x^3}{3}\arctan x - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{\ln(1+x^2)}{6} + c;$

(n) $\dfrac{x^2e^{x^2}}{2} - \dfrac{e^{x^2}}{2} + c.$

4.

(a) $2\ln|x-2| - \ln|x-1| + c;$

(b) $\dfrac{\ln|x-1|}{6} - \dfrac{\ln|x+1|}{2} + \dfrac{\ln|x+2|}{3} + c;$

(c) $\dfrac{\ln(x^2+4)}{2} + c;$

(d) $\dfrac{3}{2}\ln|x+1| - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) + \dfrac{1}{2}\arctan(x) + c;$

(e) $\dfrac{x^2}{2} + 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + c;$

(f) $\dfrac{x^2}{2} + 2x + \ln(x^2+1) + 2\arctan(x) + c.$

5.

(a) $\dfrac{1}{2}\left(\arctan(x) + \dfrac{x}{1+x^2}\right) + c;$

(b) $\ln|1+\cos(x)| - \ln|\cos(x)| + c;$

(c) $-\dfrac{\ln|1-\sin(x)|}{4} + \dfrac{1}{2(1-\sin(x))} + \dfrac{\ln|1+\sin(x)|}{4} + c;$

(d) $2\dfrac{\sqrt{(e^x+1)^3}}{3} - 2\sqrt{e^x+1} + c;$

(e) $-2\arccos\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c;$

(f) $\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + \dfrac{6}{7}t^{\frac{7}{6}} - t + \dfrac{6}{5}t^{\frac{5}{6}} - \dfrac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} + 2t^{\frac{1}{2}} - 3t^{\frac{1}{3}} + 6t^{\frac{1}{6}} - \ln(t^{\frac{1}{6}} + 1) + c.$

6. **b.**

$$\int \sqrt{4+t^2}dt = \frac{(t+\sqrt{t^2+4})^2}{8} - \frac{2}{(t+\sqrt{t^2+4})^2} + 2\ln\left(\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}\right) + c$$

7.

(*a*) -3;

(*b*) 4;

(*c*) 0;

(*d*) 0;

(*e*) -1;

(*f*) $\dfrac{b^2-a^2}{2}$.

8.

(*a*) $\dfrac{36}{\sqrt{2}}$;

(*b*) $\dfrac{128}{15}+2\pi$;

(*c*) $\dfrac{1}{12}$;

(*d*) $\dfrac{7}{48}$.

9. -

10. $\lim\limits_{x\to 0} M_f(x) = f(0)$.

11. -

12. $I = \dfrac{\ln(3)}{6} - \dfrac{\ln(2)}{3} + \dfrac{\arctan(\sqrt{2})}{3\sqrt{2}}$.

13.

(*a*) $-\dfrac{1}{2}$;

(*b*) 4;

(*c*) $\dfrac{\pi^2}{8}$;

(*d*) -1;

(*e*) Divergente;

(*f*) $\dfrac{\pi}{2}$.

14. $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$

$I_1 = 1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \frac{(2k+1)!}{\prod\limits_{i=0}^{k}(2i+1)^2}, n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0.$$