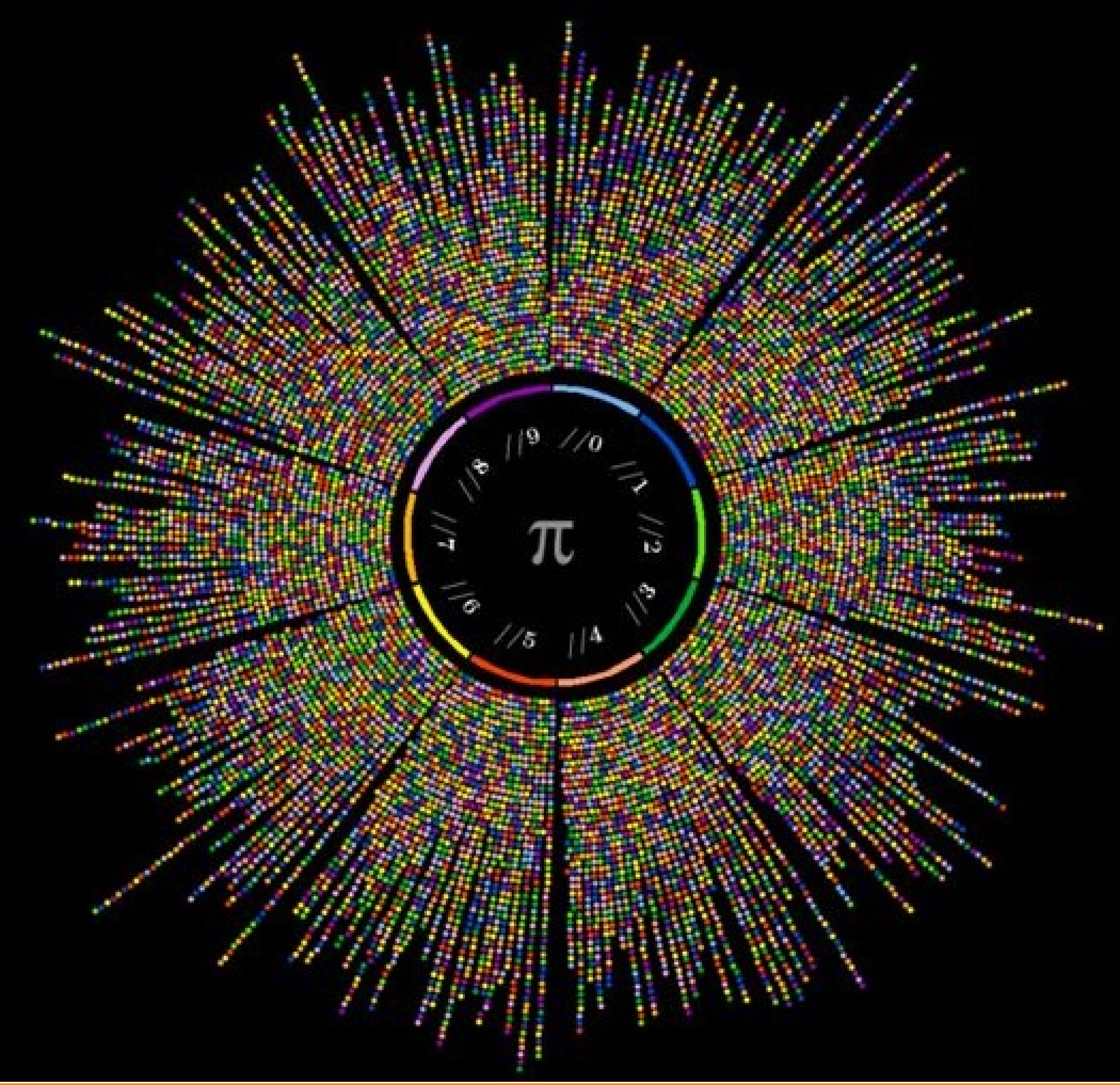


Análise Matemática 2 - Aulas Práticas

Filipe Oliveira & Henrique Guerreiro, 2022

Lisbon School
of Economics
& Management
Universidade de Lisboa

Conteúdo

Aula 1 Convergência de Séries Numéricas

1.1 Súmula dos conteúdos teóricos

Resumo 1.1

- *Sucessão das somas parciais de uma sucessão* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

- *Diz-se que uma série é convergente se o limite das suas somas parciais existe e é finito. Nesse caso,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := \lim_{N\to+\infty} S_N.$$

Caso contrário, a série diz-se divergente.

- *Alterar um número finito de termos de uma série não altera a sua natureza.*
- *Valem propriedades algébricas lineares para séries convergentes.*
- *Uma série convergente tem termo geral que tende para zero, mas o converso não é verdadeiro.*
- *A sucessão resto de uma série convergente* $\sum a_n$*,*

$$R_N = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n,$$

tem limite nulo.

- *Séries geométricas: são as séries de termo geral*

$$a_n = ar^{n-1}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

São convergentes se e só se $|r| < 1$ *(com* $a \neq 0$*). A respetiva soma é dada por*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{a}{1-r}.$$

- *Séries telescópicas: são series cujo termo geral se escreve na forma* $a_n = u_n - u_{n+1}$*.*
São convergentes se e só se a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*
A respetiva sucessão das somas parciais é dada por

$$\sum_{n=p}^{N} u_n - u_{n+1} = u_p - u_{N+1}$$

e portanto

$$\sum_{n=p}^{+\infty} u_n - u_{n+1} = u_p - u_{\infty}.$$

- *Critério de Dirichlet:* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge se e só se* $\alpha > 1$.

♠

1.2 Exercícios Propostos

✍ **Exercício 1.1** Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguintes séries são convergentes e calcule a respetiva soma:

$$(a) \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n : \qquad (b) \sum_{n\geq 0} x; \qquad (c) \sum_{n\geq 0} (1-|x|)^n; \qquad (d) \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2+n}.$$

✍ **Exercício 1.2** Utilize a teoria das séries geométricas para representar na forma de fração $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, os seguintes números racionais expressos na forma de dízima infinita periódica:

$$(a)\ q_1 = 3,(6) \qquad (b)\ q_2 = 1,(18) \qquad (c)\ q_3 = 1,01(08) \qquad (d)\ q_4 = 1,(123) \qquad (e) q_5 = 0,(9).$$

✍ **Exercício 1.3** Calcule a soma das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n\geq 0} 3^{-(5n+1)}; \quad (b) \sum_{n\geq 2} \frac{2^n+3^n}{6^n}; \quad (c) \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1};$$

$$(d) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}; \quad (e) \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{3}{2^n}\right).$$

✍ **Exercício 1.4** Seja (a_n) uma sucessão convergente.

Mostre que a série $\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n+k})$ é convergente e que

$$\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n+k}) = a_1 + a_2 + \ldots + a_k - k \lim_{n\to\infty} a_n.$$

✍ **Exercício 1.5** Determine a natureza das seguintes séries e a soma daquelas que são convergentes:

$$(a) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}; \qquad (b) \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^2-4}; \qquad (c) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+k)},\ k\in\mathbb{N};$$

$$(d) \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}; \qquad (e) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+3)(n+6)}.$$

✍ **Exercício 1.6** Seja (a_n) uma sucessão de termos não nulos.
Mostre que que se $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, então $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ é divergente.

✍ **Exercício 1.7** Seja (a_n) uma sucessão real tal que $\lim |a_n| = +\infty$.
Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n}$.

1.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

1. (a) Podemos já afastar o caso $x = 0$ em que a série é convergente e a sua soma [1] é 1. Para $x \neq 0$, temos uma serie geométrica e portanto basta classificar a razão $r = x/(1+x)$. Basta ver quando $r^2 < 1$, que é equivalente a $|r| < 1$ mas neste caso facilita as contas, que é $x > -1/2$. Logo a série é convergente para $x > -1/2$. A sua soma é então

$$\frac{1}{1-r} = 1 + x.$$

   (b) Neste caso o termo geral é constante, pelo que só há convergência quando é nulo e nesse caso a soma da série também é nula.

   (d) Se $x = 0$, a série é convergente com soma nula. Se $x \neq 0$, é equivalente estudar a série de termo geral $a_n = 1/(n^2+n)$, cuja soma é conhecida (telescópica), com valor 1. Logo a soma da série original é x.

2. Podemos escrever dízimas periódicas na forma de uma série geométrica encontrando p, k tal que

$$0.(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{p+kn}}.$$

[1] Utilizando a convenção $0^0 = 1$.

(c) Primeiro removemos a parte conhecida

$$q_3 = 1.03 + 0.00(08) = \frac{103}{100} + 0.00(08).$$

Agora

$$0.00(08) = 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{2+2n}} = \frac{8}{10^4}\frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{8\times 10^4}{10^5 \times 99} = \frac{2}{25\times 99}.$$

Juntando tudo fica

$$q_3 = \frac{103}{100} + \frac{2}{25\times 99} = \frac{2041}{1980}.$$

3. (a) É uma série geométrica de razão $1/3^5$ cujo primeiro termo é $1/3$, logo a soma é

$$\frac{1/3}{1-1/3^5}.$$

(c) Podemos aplicar frações parciais e obter

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

À semelhança das séries telescópicas, podemos calcular da seguinte forma a soma parcial

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=4}^{N+2} \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+2-1} \\ &\to \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Logo a soma da série é $3/4$.

4. Aplicar as ideias do exercício anterior:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n+k}) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{N} a_{n+i-1} - a_{n+i} \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i - k\sum_{i=1}^{k} a_{N+i}\end{aligned}$$

e tomar o limite.

5. (a) É de termos positivos. Basta comparar com a série $n^{-\alpha}$, com $\alpha = 1/2 \leq 1$, que é divergente e ver que o limite do quociente não é nulo nem infinito.

(c) Podemos ver que

$$a_n^{(k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)$$

e aplicar o Exercício 4 obtendo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}.$$

(e) Pensando como no c), temos

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}.\right)$$

Logo

$$\frac{1}{n(n+6)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+6}\right)$$

e

$$\frac{1}{n(n+3)(n+6)} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{n(n+3)} - \frac{1}{(n+3)(n+6)}\right].$$

Temos a diferença de duas séries convergentes:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+3)(n+6)} &= \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+3)}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+3)}+\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n(n+3)}\right)\\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{18}\right)\\ &= \frac{73}{1080}.\end{aligned}$$

6. A sucessão converge, logo $\lim a_n = 0$. Assim, $\lim\left|\frac{1}{a_n}\right| = +\infty$, pelo que a série é divergente.
7. Tem-se

$$\lim\frac{a_n}{1+a_n} = \lim\frac{1}{\frac{1}{a_n}+1} = \frac{1}{1+0} = 1$$

logo a série é grosseiramente divergente.

Aula 2 Critérios de convergência para séries numéricas

2.1 Súmula dos conteúdos teóricos

Resumo 2.1

Para séries de termos positivos:

- *1º Critério da comparação:* $0 \leq a_n \leq b_n$ *e* $\sum b_n$ *é convergente, então* $\sum a_n$ *também é convergente.*
- *2º Critério da comparação: Sejam* $a_n, b_n \geq 0$, *com* $b_n > 0$ *a partir de certa ordem. Se* $a_n/b_n \to L$, *com* $0 < L < +\infty$, *então* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *têm mesma natureza.*
- *3º Critério da comparação: Sejam* $a_n, b_n \geq 0$, *com* $b_n > 0$ *a partir de certa ordem. Se* $a_n/b_n \to 0$ *e* $\sum b_n$ *converge, então* $\sum a_n$ *também converge. Se* $a_n/b_n \to \infty$ *e* $\sum b_n$ *diverge, então* $\sum a_n$ *também diverge.*
- *Crtérios D'Alembert (da razão) e de Cauchy (da raiz). Se existir*

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

ou

$$r = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}:$$

Se $r \neq 1$, *a série converge se e só se* $r < 1$.

Para séries de termos com sinal variável

- *Convergência absoluta:* $\sum |a_n|$ *converge, e nesse caso também* $\sum a_n$ *converge.*
- *Séries alternadas:* $a_n a_{n+1} \leq 0$.
- *Critério de Leibniz:* $|a_n| \downarrow 0$, a_n *alternada, então* $\sum a_n$ *é convergente.*

2.2 Exercícios Propostos

Exercício 2.1 Estude, utilizando um critério de comparação, a natureza das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n\geq 2} \frac{\sin^2(n)}{n^3-1}; \quad (b) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n\,(n^2+1)}}; \quad (c) \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}; \quad (d) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{3+(-1)^n}\right)^n;$$

$$(e) \sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad (f) \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}; \quad (g) \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\log n}; \quad (h) \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^4-3n^2-1};$$

$$(i) \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n^k}; \quad (j) \sum_{n\geq 1} e^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n\sqrt{n}}; \quad (k) \sum_{n\geq 1} \left(n\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right)^{2n}; \quad (l) \sum_{n\geq 1} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n;$$

$$(m) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{2}\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^n; \quad (n) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{2n+3}\right)^{n\sqrt{n}}; \quad (o) \sum_{n\geq 1} \left(n\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{2n};$$

$$(p) \sum_{n\geq 1} e^{-n}(\log n)^n \quad (q) \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n} e^{-n}; \quad (r) \sum_{n\geq 1} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}}; \quad (s) \sum_{n\geq 1} \frac{n\sqrt{n+1}}{(n+1)^3\sqrt[3]{n^2+n}};$$

$$(t) \sum_{n\geq 1} \left(n-\sqrt{n^2-1}\right); \quad (u) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}\left(\frac{9}{8}\right)^n; \quad (v) \sum_{n\geq 1} n! \left(\frac{3}{4}\right)^{n^2}; \quad (w) \sum_{n\geq 1} \frac{n}{(a^2+2)^n}.$$

Exercício 2.2 Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes de termos positivos. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

$$(a) \sum \left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right); \qquad (b) \sum \frac{n+1}{n} a_n.$$

✍ **Exercício 2.3** Estude, quanto à natureza, a série de termo geral $\dfrac{a^n}{1+b^n}$ nos seguintes casos:

$$(i)\, 0 < a < b \qquad (ii)\, 0 < b \leq a < 1; \qquad (iii)\, 1 \leq b \leq a.$$

✍ **Exercício 2.4** Estude a convergência das seguintes séries, indicando, em particular, se a convergência é simples ou absoluta:

$$(a) \sum \frac{(-1)^n n^n}{\pi^n n!}; \qquad (b) \sum (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (c) \sum (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+1}$$

✍ **Exercício 2.5** Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões de termos positivos tais que as séries $\sum a_n$ e $\sum (b_n - b_{n+1})$ são convergentes.
Mostre que a série $\sum (a_n b_n)$ é uma série convergente.

✍ **Exercício 2.6** Pretende-se provar o seguinte Teorema:

Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de termos positivos tais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{2.1}$$

Então

$$\sum b_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge }.$$

Sejam pois duas sucessões (a_n) e (b_n) que verificam a condição (2.1).

(a) Seja $\omega_n = \dfrac{b_n}{a_n}$. Mostre que (ω_n) é decrescente.

(b) Deduza da alínea anterior a existência de uma constante $M \geq 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \omega_n \leq M$ e conclua.

✍ **Exercício 2.7** Utilizando o Teorema do exercício anterior, determine a natureza da série de termo geral

$$a_n = \frac{2 \times 5 \times 8 \times \cdots \times (3n-1)}{3 \times 6 \times 9 \times \cdots \times (3n)}.$$

✍ **Exercício 2.8**

(a) Seja (u_n) uma sucessão de termos positivos. Mostre que

$$\sum u_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n^2 \text{ converge.}$$

(b) A propriedade mantém-se válida se retirarmos a condição de positividade?

✍ **Exercício 2.9**

(a) Mostre que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$.

(b) Aplicando a desigualdade anterior, mostre que dada uma sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termos positivos,

$$\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum \frac{1}{n}\sqrt{v_n} \text{ converge.}$$

(c) Aplicação: Utilizando o resultado da alínea (d), justifique a convergência da série

$$\sum \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{n^2}}.$$

✍ **Exercício 2.10** Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos tal que $\sum u_n$ converge.
Mostre que a série de termo geral $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge.

✍ **Exercício 2.11** Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as seguintes séries:

$$(a)\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}};\quad (b)\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\left(n^2+1\right)}{n^2+n+3};\quad (c)\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n n}{n^2\sqrt{n}};$$

$$(d)\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!};\quad (e)\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n n}{6n-5};\quad (f)\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n.$$

✍ **Exercício 2.12** Seja (a_n) uma sucessão tal que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Prove que a série $\sum a_n^2$ é também convergente e forneça um contra-exemplo para a impicação recíproca.

2.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

2.1 (a) De termos positivos. Compara com a série de Dirichlet $1/n^3$, convergente.

(c) De termos positivos. Aplicar o critério da razão

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\rightarrow\frac{1}{e}<1$$

logo é convergente.

(d) De termos positivos. É majorada pela série geométrica convergente $1/2^n$, logo é convergente. Podemos aplicar também o critério da raiz e obter

$$\limsup\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}=r<1$$

e concluir que a série é convergente.

(g) De termos positivos. Pelo contra recíproco do critério da comparação, comparando com a série harmónica $1/\log n\geq 1/n$, que é divergente, concluímos que esta série também é divergente.

(p) Forma 1: notando que $x=e^{\log x}, x>0$ temos

$$\begin{aligned}e^{-n}(\log n)^n&=\exp(-n+\log((\log n)^n))\\&=\exp(-n+n\log(\log n)))\\&=\exp(n(\log(\log n)-1))\\&\rightarrow+\infty\neq 0\end{aligned}$$

e portanto a série é divergente.

Forma 2: A partir de certa ordem, $\log n>e$, logo a partir de certa ordem temos $a_n>r^n$, com $r>1$, pelo que a série é divergente.

Forma 3: Pelo critério da raiz , $\sqrt[n]{a_n}=\log(n)/e\rightarrow+\infty$, logo a série diverge. De forma semelhante se podia aplicar o critério da razão.

(s) Podemos extrair os termos dominantes do numerador e denominador. Estes são $n^{3/2}$ e $n^{3+2/}$, respetivamente. Assim comparando com a série $1/n^\alpha$, $\alpha=13/6$, concluímos que é convergente.

2.2 (a). Por 6, sabemos que por exemplo $1/a_n$ é divergente. Como temos termos positivos

$$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\geq\frac{1}{a_n}$$

logo é divergente (contra recíproco do critério de comparação).

(b). Se compararmos com a_n, temos

$$\frac{\frac{n+1}{n}a_n}{a_n}=\frac{n+1}{n}\rightarrow 1$$

logo tem a mesma natureza do que $\sum a_n$, que é convergente.

2.4 (a) A série é absolutamente convergente pelo critério da razão

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{\pi}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{\pi} < 1.$$

(b) Podemos analisar o comportamento de $\arctan x$ perto da origem e notar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} =: \arctan' 0 = \frac{1}{1+0^2} = 1.$$

Logo $|a_n| = \arctan(1/n)$ t.m.n de $1/n$, que é divergente. A série não é absolutamente convergente.

A série é alternada. Sabemos que $\arctan x$ é contínua, crescente (a sua derivada é $1/(1+x^2)$), e que é sempre positiva para $x > 0$ (porque $\tan 0 = 0$). Assim, como $1/n$ é decrescente, vem que $|a_n| = \arctan(1/n)$ decresce para zero. Pelo critério de Leibniz, a série é convergente.

Logo a série é simplesmente convergente.

(c) Facilmente vemos que a série não é absolutamente convergente comparando assintoticamente com a série harmónica, que é divergente.

Para a analisar a convergência simples, observamos que é série alternada. Claramente $|a_n| \to 0$. Para observar que $|a_n|$ é decrescente basta ver que $f(x)$ é decrescente para x grande, com

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

De facto

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0\,\forall\, x > 1.$$

Assim, pelo critério de Leibniz, a série é convergente.

Logo a série é simplesmente convergente.

2.5 Sabemos que a expressão das somas parciais de $b_n - b_{n+1}$ é

$$B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{N+1}.$$

Como esta série converge, por definição a sucessão B_N converge, e portanto b_N é uma sucessão também convergente. Tomemos então o seu limite $L \in \mathbb{R}$, ou seja $L = \lim_{N+\infty} b_N$. Basta comparar então a série do enunciado $a_n b_n > 0$ com a série convergente $a_n > 0$ e temos

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n b_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} b_n = L.$$

Como $0 \le L < +\infty$, concluímos que $a_n b_n$ é convergente.

2.6 (a) Temos

$$\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \frac{\frac{b_{n+1}}{b_n}}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \le 1$$

por hipótese. Logo ω_n é decrescente.

(b) Como ω_n é decrescente, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos $\omega_n \le \omega_1 =: M$. É então

$$0 \le b_n = \omega_n a_n \le M a_n.$$

Como $\sum b_n$ diverge, pelo critério de comparação $\sum M a_n$ diverge. Como M é uma constante, $\sum a_n$ também diverge.

2.7 Note-se que, por definição,

$$a_{n+1} = a_n \frac{3n+2}{3n+3}.$$

Vem então

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n+2}{3n+3} = \frac{n+3/2}{n+1} = 1 + \frac{1}{2(n+1)} \ge 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

com $b_n := 1/n$. Como $\sum b_n$ diverge, concluímos pelo teorema anterior que a_n diverge.

Aula 3 Séries de funções

3.1 Súmula dos conteúdos teóricos

Resumo 3.1

Dada uma sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida num conjunto $D \subset \mathbb{R}$:

- *Convergência pontual*

$$\forall x \in D, f_n(x) \to f(x).$$

ou seja

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall x \in D \, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- *Convergência uniforme*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall x \in D, \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

A diferença é que aqui "existe um para todos" e no caso anterior "para todos existe um".

- *A convergência uniforme implica convergência pontual.*
- *A convergência uniforme é equivalente a*

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

onde

$$\|f_n - f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|.$$

3.2 Exercícios Propostos

Exercício 3.1 Considere a sucessão de funções (f_n) definida por $f_n(x) = e^{-nx}$. Estude a convergência pontual/uniforme de (f_n) nos intervalos

$$(a)\; X = [0;1] \qquad (b)\; X = [1;2].$$

Exercício 3.2 Considere a sucessão de funções definida em $X = [0;1]$ por $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.
Mostre que (f_n) converge pontualmente mas não uniformemente.

Exercício 3.3 Considere, para $n \in \mathbb{N}$, a função definida em $X = [0;1]$ por $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

(a) Calcule $\lim \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_0^1 (\lim f_n(x))\,dx$.

(b) A sucessão (f_n) converge uniformemente em $X = [0;1]$?

Exercício 3.4 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada limitada em $\mathbb{R}$.

Mostre que a sucessão (h_n) definida por

$$h_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

converge uniformemente em $X = \mathbb{R}$.

Exercício 3.5 Considere, para $n \in \mathbb{N}$, a função definida em $X = [0;1]$ por

$$f_n(x) = nx^n \ln(x) \text{ se } x \in]0;1] \text{ e } f_n(0) = 0.$$

(a) Calcule o limite pontual f de (f_n) no intervalo $[0;1]$.

(b) Estude as variações de $g_n = f_n - f$.

(c) Conclua quanto à convergência/não convergência uniforme de (f_n) para f.

3.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

2.8 (a) Como $\sum u_n$ converge, $u_n \to 0$ e portanto a partir de certa ordem $u_n \leq 1$. Assim, a partir de certa ordem temos

$$0 \leq u_n^2 \leq u_n$$

pelo que como $\sum u_n$ converge concluímos que $\sum u_n^2$ também converge.

(b) Não. Se considerarmos

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Temos $\sum u_n$ convergente pelo critério de Leibnitz mas $\sum u_n^2 = \sum 1/n$, que é divergente.

2.10 É de termos positivos logo vale o critério de comparação do limite. Temos

$$\frac{\frac{u_n}{1+u_n}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n} \to 1$$

onde utilizámos o facto de $u_n \to 0$ por $\sum u_n$ ser convergente. Concluímos assim que $\frac{u_n}{1+u_n}$ t.m.n. de $\sum u_n$, que é convergente.

2.11 Vamos designar o termo geral por a_n.

(a) A série $\sum |a_n|$ é uma série de Dirichlet com $\alpha \leq 1$, logo é divergente. A série $\sum a_n$ é uma série alternada e $a_n \downarrow 0$, logo pelo critério de Leibnitz é convergente. Concluímos que a série $\sum a_n$ é simplesmente convergente.

(b) O limite de a_n não existe já que $\limsup a_n = 1$ e $\liminf a_n = -1$, logo a série é divergente.

(c) A série $\sum |a_n|$ é uma série de Dirichlet com $\alpha = 3/2 > 1$ logo é convergente. Concluímos que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

(d) Se $a = 0$ a série é absolutamente convergente (é nula). Se $a \neq 0$, aplicamos o critério da razão a a_n e obtemos

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{a^{2n+3}}{(2n+1)!(2n+1)(2n+2)} \frac{(2n+1)!}{a^{2n+1}} \\ &= \frac{a^2}{(2n+1)(2n+2)} \to 0 < 1\end{aligned}$$

logo é convergente. Concluímos que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

(e) O limite de a_n não existe já que $\limsup a_n = 1/6$ e $\liminf a_n = -1/6$, logo a série é divergente.

(f) Aplicamos o critério da raiz a a_n e obtemos

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+1}{3n+1} \to \frac{2}{3} < 1$$

logo é convergente. Concluímos que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

2.12 As séries $\sum a_n^2$ e $\sum |a_n|$ são de termos positivos. Como $\sum |a_n|$ é convergente, $|a_n| \to 0$ e a partir de certa ordem $|a_n| \leq 1$. Logo, a partir de certa ordem

$$a_n^2 \leq |a_n|.$$

Como $\sum |a_n|$ é convergente, pelo critério de comparação também $\sum a_n^2$ é convergente.
Para o contra-exemplo: com $a_n = 1/n$, $\sum a_n^2$ é convergente mas $\sum a_n$ é divergente.

3.1 (a) Temos convergência pontual para a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}.$$

A convergência não é uniforme porque

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0.$$

(b) Em $[1,2]$, a convergência é uniforme para $f \equiv 0$ porque

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = e^{-n} \to 0$$

3.2 Temos convergência pontual

$$f_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + nx^2} \to 0 \, \forall x \in X = [0,1]$$

Se escolhermos $x_n = 1/n \in X \, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1/n}{2/n} = \frac{1}{2} \not\to 0.$$

logo a convergência não é uniforme.

3.4 Seja $\varepsilon_n = 1/n$. Como f' é limitada, está definida $\|f'\|_\infty \in \mathbb{R}$. Temos

$$|h_n(x) - f(x)| = |f(x+\varepsilon_n) - f(x)| = \varepsilon_n \left| \frac{f(x+\varepsilon_n) - f(x)}{\varepsilon_n} \right|. \tag{3.1}$$

Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, pelo teorema do valor médio (Lagrange) existe $c_n \in (0, \varepsilon_n)$ tal que

$$\left| \frac{f(x+\varepsilon_n) - f(x)}{\varepsilon_n} \right| = |f'(c_n)| \leq \|f'\|_\infty.$$

Por (3.1) vem então

$$\|h_n - f_n\|_\infty \leq \|f'\|_\infty \varepsilon_n \to 0$$

e a convergência é uniforme.

3.5 (a) Para $x = 0$, claramente $f_n \to 0$. Para $x = 1$, $f_n \equiv 0 \to 0$. Para $0 < x < 1$, $nx^n \to 0$ e portanto $f_n \to 0$. Logo $f_n \to 0$ em $[0,1]$.

(b) Temos $g_n = f_n$. A derivada da função em $(0,1)$ é

$$g_n'(x) = nx^{n-1}(n \log x + 1)$$

que tem apenas um zero em $x_n = e^{-1/n}$. É ainda $g_n' < 0$ em $(0, x_n)$ e $g_n' > 0$ em $(x_n, 1)$. Como g_n é contínua em $[0,1]$, temos que g_n é decrescente em $[0, x_n]$ e crescente em $[x_n, 1]$. Como $g_n \leq 0$ em $[0,1]$, podemos concluir que o máximo global de $|g_n|$ é obtido em x_n.

(c) Concluímos que a convergência não é uniforme, já que $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$:

$$\|f_n - f\|_\infty = |g_n(x_n)| = |f_n(e^{-1/n})| = ne^{-1} \log e^{-1/n} \equiv e^{-1}.$$

Aula 4 Séries de funções

4.1 Súmula dos conteúdos teóricos

Resumo 4.1

Para séries de funções:

- *Trata-se essencialmente de aplicar o que sabemos sobre sucessões de funções à sucessão*
$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x).$$
- *Critério de Weierstrass. Para* $f_n : D \to \mathbb{R}$, *se*
$$\forall\, x \in D, |f_n(x)| \leq a_n$$
e $\sum a_n$ *é convergente, então* $\sum f_n$ *converge uniformemente. Reparar que a condição acima é equivalente a dizer que*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty.$$
- *Basta utilizar as propriedades de "troca de limites" para sucessões e obtemos as seguintes para séries*
  - *Se* $\sum f_n \to f$ *uniformemente e* f_n *são contínuas então* f *é contínua.*
  - *Se as* f_n *são diferenciáveis,* $\sum^N f_n \to f$ *pontualmente e* $\sum f_n' \to g$ *uniformemente, então* $\sum f_n' \to \sum f_n'$ *uniformemente.*

4.2 Exercícios Propostos

Exercício 4.1 Estude a convergência uniforme das seguintes séries de funções:
$$(a) \sum x^n e^{-nx^2}; \quad (b) \sum \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}.$$

Exercício 4.2 Calcule, para $x > 0$, a soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$.

Sugestão: comece por considerar a série $\sum e^{-nx}$.

Exercício 4.3 Determine os intervalos de convergência das seguintes séries de potências e estude também a convergência nos extremos desses intervalos:
$$(a) \sum_{n\geq 1} n\,(x-2)^{n-1}; \quad (b) \sum_{n\geq 1} (n+1)^{-1/2}\,(x+1)^n; \quad (c) \sum_{n\geq 1} \binom{n+4}{5} x^{4n};$$
$$(d) \sum_{n\geq 1} \frac{1.3....\,(2n+1)}{2.4....\,(2n+2)}\,\frac{1}{n+1}\,(x-1)^n.$$

Exercício 4.4 Calcule as somas das seguintes séries nos respectivos intervalos de convergência:
$$(a) \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}; \quad (b) \sum_{n\geq 1} nx^n; \quad (c) \sum_{n\geq 1} n^2x^n; \quad (d) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n+1}\,(x-1)^{2n+1}; \quad (e) \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\,(x-1)^{n+1}.$$

4.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

1. (a) Uma forma alternativa seria ver que f_n é continua para qualquer n mas $f := \lim f_n$ não é.

3.3 (a). Temos

$$\int f_n = \left[-\frac{e^{-nx^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{e^{-nx^2}}{2} \to \frac{1}{2}.$$

É também $f_n \to 0$ e portanto

$$\int \lim f_n = 0.$$

(b). Não porque como cada f_n é contínua, se a convergência fosse uniforme teríamos

$$\int \lim f_n = \lim \int f_n$$

mas na alínea anterior vimos que não temos.

4.1 (a) Note-se que

$$|f_n(x)| = \left(xe^{-x^2}\right)^n.$$

Mas com $g(x) = xe^{-x^2}$, temos $g'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$. Pelo que a função g varia da seguinte forma

- Decrescente para $x \leq \sqrt{2}/2$.
- Crescente para $x \in [\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$
- Decrescente para $x \leq \sqrt{2}/2$.

Como

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

concluímos que o máximo de $|g(x)|$ é obtido em $\pm\sqrt{2}/2$. Vem então

$$r := \|xe^{-x^2}\|_\infty = |g(\pm\sqrt{2}/2)| = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} < 1.$$

A sucessão f_n é então majorada por $a_n = r^n$, e $\sum a_n$ é convergente. Desta forma, pelo critério de Weierstrass, a convergência é uniforme.

(b) Temos $f_n \leq 1/n^2$, e $\sum 1/n^2$ é convergente, logo há convergência uniforme pelo critério de Weierstrass.

4.2 Com $g_n = e^{-nx}$, temos $g_n' = -f_n$. Temos também que $\sum g_n$ converge pontualmente para $x > 0$ já que é uma série geométrica de razão $e^{-x} < 1$. A sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{e}\frac{1}{1-e^{-x}}$$

A série $\sum g_n'$ converge uniformemente em $[M, +\infty)$ para qualquer real $M > 0$. Para ver isso, basta observar que

$$|g_n'| = ne^{-nx} \leq ne^{-nM},$$

que é convergente (por exemplo pelo critério da razão). Desta forma, temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} -g_n' = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right)' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}\right)'.$$

Como

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}\right)' = \left(\frac{1}{e}\frac{1}{1-e^{-x}}\right)' = -\frac{1}{e}\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

vem

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} = \frac{1}{e}\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}.$$

O que está acima vale para $x \in [M, +\infty)$. Mas como $M > 0$ é arbitrário, podemos concluir que vale para qualquer $x > 0$.

Aula 5 Séries de potências e séries de Taylor

5.1 Súmula dos resultados teóricos

Resumo 5.1

- *Uma série de potências (ou série inteira) centrada em x_0 é dada por*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$
para alguma sucessão real $(a_n)_{n\in N}$.
- *O raio de convergência pode ser obtido da seguinte forma. Seja $L=\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Então*
$$R=\begin{cases}1/L & ,L\neq 0\\ +\infty, & ,L=0\end{cases}.$$
Pode ser ainda obtido por
$$R=\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$
caso o limite exista.
- *Uma série de potências converge absolutamente no interior do seu raio de convergência, ou seja, em $I=(x_0-R,x_0+R)$; diverge grosseiramente no exterior, ou seja, em $\bar{I}^C=(-\infty,x_0-R)\cup(x_0+R,+\infty)$; para x_0-R e x_0+R nada se pode afirmar a priori.*
- *A convergência não é necessariamente uniforme em I mas é em todo o intervalo compacto da forma $[x_0-c,x_0+c]\subseteq I$.*
- *Uma série de potências é de classe C^∞ em I e temos*
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$
onde $f_n(x)=a_n(x-x_0)^n$.
- *A série de Taylor de uma função f em torno de x_0 é dada por*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$
- *Se uma função é igual a uma série de potências numa vizinhança de um ponto, essa série de potências é a sua série de Taylor em torno desse ponto.*
- *Uma função diz-se analítica em x_0 se é igual à sua série de Taylor (em torno de x_0) numa vizinhança de x_0.*
- *Qualquer função analítica é de classe C^∞, mas o converso não é verdade.*
- *O polinómio de Taylor de grau N de uma função $f\in C^{N+1}$ é dado por*
$$p_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$
O resto é dado por
$$R_N(x)=f(x)-p_N(x)$$
e existe $c\in(x_0,x)$ – ou (x,x_0) no caso $x<x_0$ – tal que
$$R_N(x)=\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}.$$
- *Seja $f\in C^\infty$ e $\varepsilon>0$. Se $R_N(x)\to 0$ para todo o $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, então f é analítica em $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$.*
- *Para analisar o intervalo onde a função é igual à sua série de Taylor. Seja $\varepsilon>0$ e $V=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ e*

$f \in C^{\infty}$. e existem constantes M, a tais que

$$|f^{(n)}(x)| \leq Ma^n$$

para $x \in V$. Então f é analítica em x_0 e é igual à sua série de Taylor em torno de x_0 em V.

- *Para provar que uma função é analítica num intervalo. Seja $I = (\alpha, \beta)$ e $f \in C^{\infty}$. Se para qualquer compacto $K = [c, d] \subseteq I$ existem constantes M, a tais que*

$$\forall x \in K, |f^{(n)}(x)| \leq Ma^n n!$$

então f é analítica em I.

- *A série de Taylor de uma função f em torno de x_0 é dada por*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

- *Se uma função é igual a uma série de potências numa vizinhança de um ponto, essa série de potências é a sua série de Taylor em torno desse ponto.*
- *Uma função diz-se analítica em x_0 se é igual à sua série de Taylor (em torno de x_0) numa vizinhança de x_0.*
- *Qualquer função analítica é de classe C^{∞}, mas o converso não é verdade.*
- *O polinómio de Taylor de grau N de uma função $f \in C^{N+1}$ é dado por*

$$p_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

O resto é dado por

$$R_N(x) = f(x) - p_N(x)$$

e existe $c \in (x_0, x)$ – ou (x, x_0) no caso $x < x_0$ – tal que

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}.$$

- *Seja $f \in C^{\infty}$ e $\varepsilon > 0$. Se $R_N(x) \to 0$ para todo o $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, então f é analítica em $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.*
- *Para analisar o intervalo onde a função é igual à sua série de Taylor. Seja $\varepsilon > 0$ e $V = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ e $f \in C^{\infty}$. e existem constantes M, a tais que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq Ma^n$$

para $x \in V$. Então f é analítica em x_0 e é igual à sua série de Taylor em torno de x_0 em V.

- *Para provar que uma função é analítica num intervalo. Seja $I = (\alpha, \beta)$ e $f \in C^{\infty}$. Se para qualquer compacto $K = [c, d] \subseteq I$ existem constantes M, a tais que*

$$\forall x \in K, |f^{(n)}(x)| \leq Ma^n n!$$

então f é analítica em I.

♠

5.2 Exercícios Propostos

✍ **Exercício 5.1** Desenvolva a função $x \to \ln(x)$ em série de potências de $x - 2$, indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.

✍ **Exercício 5.2** Desenvolva a função $x \to \dfrac{1}{x^2}$ em série de potências de $x + 1$, indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.

✍ **Exercício 5.3** Considere a função $f : x \to e^x$. Calcule a sua série de MacLaurin e prove que a função é soma dessa série para todo o $x \in \mathbb{R}$.

✍ **Exercício 5.4** Escreva o desenvolvimento de MacLaurin das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) $f(x) = a^x$, $a > 0$
(b) $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$
(c) $f(x) = \cos x$.

✍ **Exercício 5.5** Desenvolva em série de MacLaurin a função $\log\left(1 + x^3\right)$ e justifique que a função tem um mínimo no ponto $x = 0$.

✍ **Exercício 5.6** Desenvolva em série de potências de $x - 1$ a função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 \log(x^2),$$

indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.

✍ **Exercício 5.7** Desenvolva em série de potências de $x - 2$ a função $x \to \dfrac{4}{3x}$, indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.
Utilize o resultado obtido para determinar o valor de $f^{(17)}(2)$.

✍ **Exercício 5.8** Desenvolva em série de MacLaurin a função $x \to 2^x + \dfrac{1}{2+x}$ e indique, justificando, o intervalo de convergência da série obtida.

✍ **Exercício 5.9** Calcule o polinómio de Taylor de grau 2 da função definida por

$$f(x) = \int_1^{u(x)} \ln(t)dt$$

centrado no ponto $a = 2$, sabendo que a função u é de classe $C^2(\mathbb{R})$, tem por contradomínio o conjunto $[1, +\infty)$ e $u(2) = 1$.

✍ **Exercício 5.10** Utilize a fórmula de MacLaurin para provar a fórmula dita do Binómio de Newton

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

5.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

4.3 (a) Temos $a_n = n$, $x_0 = 2$. E $\sqrt[n]{n} \to 1$ logo $R = 1$. Para $x = x_0 - R = -1$ é $\sum n(-1)^n$, que é divergente. Para $x = x_0 + R = 3$ é $\sum n$, também divergente. Logo há convergência em $(1, 3)$ e divergência caso contrário.

(b) Temos $a_n = 1/\sqrt{n+1}$, $x_0 = -1$. Temos $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$, logo $R = 1$. Para $x = x_0 - R = -2$ é

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Pelo critério de Leibnitz, esta série é (simplesmente) convergente. Para $x = x_0 - R = 0$ é

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

que é divergente (comparar com série de Dirichlet). Logo há convergência absoluta em $(-2, 0)$, convergência simples para $x = -2$ e divergência caso contrário.

4.4 (a) O raio de convergência é $R = 1$ e portanto o intervalo de convergência é $I = (-1, 1)$. Notamos que derivar torna a expressão mais simples. Seja

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}.$$

e

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

De facto

$$f_n'(x) = x^{n-1},$$

que é o termo geral de uma série geométrica. Vem então, pela troca de derivada e série para séries de potências

$$f'(x) = \left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

para qualquer $x \in (-1,1) = I$. Isto significa que, para $x \in I$,

$$f(x) = -\log(1-x) + C$$

para alguma constante $C \in \mathbb{R}$. Como $f(0) = 0$ diretamente da expressão da série, concluimos que $C = 0$.

(b) O raio de convergência é $R = 1$, pelo que vamos considerar $-1 < x < 1$. Temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)'$$

pela troca de limites para séries de potências. Como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

vem

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Para $x = \pm 1$ a série é divergente.

(c) O raio de convergência é $R = 1$, pelo que vamos considerar $-1 < x < 1$. Temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty}(nx^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n\right)'.$$

Como pela alínea anterior é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2},$$

vem

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n = x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = x\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Para $x = \pm 1$ a série é divergente.

5.2 Calculamos a série de Taylor em torno de $x_0 = -1$. Calculando as primeiras derivadas conseguimos ver o padrão seguinte, que pode ser provado por indução:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n(n+1)!\frac{1}{x^{n+2}}.$$

Vem então

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) = n+1.$$

Desta forma, a série de Taylor em torno de $x_0 = -1$ é

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(x+1)^n.$$

O raio de convergência desta série é $R = 1$, já que $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Para $x = 0, x = -2$ a série diverge. Não sabemos ainda se a função é igual à sua série de Taylor em $I = (-2,0)$. Para provar isso vamos analisar a série em si. Utilizando ideias semelhantes ao exercício 9: para $x \in$ definimos

$$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}(x+1)^{n+1} = \frac{x+1}{1-(x+1)} = -1 - \frac{1}{x}.$$

Esta igualdade é válida porque $|x+1| < 1$ para $x \in I$. Derivando e utilizando o facto de que temos convergência uniforme em I,

$$\frac{1}{x^2} = g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(x+1)^n$$

e concluímos que a função f é analítica e o desenvolvimento é válido em I.

5.4 (a) Temos

$$f(x) = a^x = e^{xloga}$$

e portanto

$$f^{(n)}(x) = (\log a)^n a^x.$$

Desta forma

$$f^{(n)}(0) = (\log a)^n.$$

A série de MacLaurin é então

$$M(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log a)^n}{n!} x^n.$$

(b) Calcular derivadas vai ser difícil. Vamos tentar utilizar séries conhecidas. Note-se que

$$h(x) := \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1-y}\Big|_{y=-x^2}.$$

Sabemos que, com

$$g(y) = \frac{1}{1-y},$$

se tem

$$g(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n$$

para qualquer $y \in I = (-1, 1)$. Desta forma,

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

para $x^2 \in I$. Mas, note-se que

$$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 + (x/a)^2}.$$

Para qualquer $x \in (-|a|, |a|)$, temos $(x/a)^2 \in I$ e portanto

$$\frac{1}{a^2 + x^2} = h(x/a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{2n+2}} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

com

$$b_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} a^{n+2} & , n \text{ par} \\ 0, & , n \text{ ímpar} \end{cases}.$$

Sendo esta uma série de potências, sabemos que necessariamente é a série de MacLaurin desta função.

5.5 Consideremos primeiro $g(x) = \log(1 + x)$. Calculando algumas derivadas conseguimos ver que

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)! \frac{1}{(1+x)^n}$$

e portanto para $n \geq 1$

$$g^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!.$$

Concluímos então que a série de MacLaurin de $\log(1 + x)$ é

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

e esta série converge em $I = (-1, 1)$. Temos ainda de verificar que de facto $G = g$ em I. Note-se que, em

$(-1,1)$,

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{n-1} \\ &= -\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n - 1\right) \\ &= -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) \\ &= \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Como $G(0) = F(0)$, concluímos que $G = F$ em I. Como $x \in I$ é equivalente a $x^3 \in I$, vem

$$\log(1+x^3) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{3n+3}.$$

De facto também é válido em $(-1,1]$ (soma da série harmónica alternada).

5.9 Em primeiro lugar vemos que

$$f(2) = 0.$$

Vamos calcular a derivada. Seja

$$G(y) = \int_1^y \log(t)\,dt.$$

Aplicando a regra em cadeia:

$$f'(x) = (G \circ u)'(x) = G'(u(x))u'(x) = \log(u(x))u'(x).$$

onde aplicámos o TFC. Vem então

$$f'(2) = \log(u(2))u'(2) = \log(1)u'(2) = 0.$$

Calculando agora a segunda derivada

$$f''(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}u'(x) + \log(u(x))u''(x).$$

vem

$$f''(2) = u'(2)^2$$

Temos então

$$T_2(x) = \frac{1}{2}u'(2)^2(x-2)^2.$$

Aula 6 Topologia

6.1 Súmula dos conteúdos teóricos

Resumo 6.1

- *Dizemos que* $d : E \times E \to \mathbb{R}_0^+$ *é uma distância se, para quaisquer* $x, y \in E$*:*
  - ✱ $d(x,y) = 0 \iff x = y$
  - ✱ $d(x,y) = d(y,x)$
  - ✱ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *para qualquer* $z \in E$
- *Ao par* (E,d) *de um conjunto* E *equipado com uma distância* d *chamamos um espaço métrico.*
- *Denotamos por* $B_x(r)$ *a bola aberta de raio* r *e centro* x

$$B_x(r) = \{u \in E \mid d(u,x) < r\}.$$

- *Um ponto* $x \in A \subset E$ *diz-se*
  - *Interior se existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B_x(\varepsilon) \subseteq A$.
  - *Fronteiro se para qualquer* $\varepsilon > 0$, $B_x(\varepsilon)$ *interceta* A *e* A^c.
  - *Exterior se* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B_x(\varepsilon) \subseteq A^c$.
  - *Para qualquer* $A \subseteq E$, *temos*

$$E = intA \dot{\cup} frA \dot{\cup} extA$$

- *A aderência (ou fecho) de um conjunto é*

$$\bar{A} = intA \dot{\cup} frA (= A \cup frA),$$

  onde $\dot{\cup}$ *indica união disjunta.*
- *Um ponto* x *pertence a* $\bar{A}$ *se e só se existe uma sucessão de pontos em* A *que tende para* x.
- *Um conjunto diz-se aberto se é igual ao seu interior.*
- *Um conjunto diz-se fechado se é igual à sua aderência.*
- *Um conjunto é aberto (fechado) se e só se o seu complemento é fechado (aberto).*
- *Diz-se que uma sucessão* (x_n) *converge para* x *se* $d(x, x_n) \to 0$.
- *Um conjunto* A *diz-se compacto se toda a sucessão em* A *admite uma subsucessão convergente.*
- *Um conjunto compacto é limitado e fechado, mas a implicação recíproca é falsa para espaços métricos gerais.*
- *Seja* E *um espaço vetorial. Dizemos que* $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ *é uma norma se, qualquer* $x, y, z \in E$*:*
  - $\|x\| \geq 0$
  - $\|x\| = 0 \iff x = 0$
  - $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
  - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- *Qualquer norma induz uma distância* $d(x,y) = \|x - y\|$
- *Seja* $1 \leq p \leq +\infty$. *Para* $p < \infty$, *a* p*-norma em* $\mathbb{R}^n$ *é definida como*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

  No caso $p = +\infty$, *é definida por*

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p.$$

  De facto, esta definição é natural dado que

$$\|x\|_p \to \|x\|_\infty, p \to +\infty$$

♠

6.2 Exercícios Propostos

✍ **Exercício 6.1** Considere o conjunto $\mathcal{C} = C^0([0;1])$ das funções contínuas no intervalo $[0;1]$ e a função $d : \mathcal{C}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^2, \quad d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

a. Mostre que $(\mathcal{C}, d)$ é um espaço métrico.

b. Sendo $\mathcal{I}$ o conjunto das funções Riemann-integráveis no intervalo $[0;1]$, $(\mathcal{I}, d)$ é igualmente um espaço métrico?

✍ **Exercício 6.2** Seja $\mathbf{E}$ um conjunto e d a função definida em $\mathbf{E}^2$ por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

a. Mostre que d é uma distância (dita «distância grosseira» sobre $\mathbf{E}$).

b. Mostre que todos os subconjuntos de $\mathbf{E}$ são abertos.

c. Mostre que as sucessões convergentes de $\mathbf{E}$ são exatamente as sucessões estacionárias (isto é, as sucessões constantes a partir de certa ordem).

d. Considere que $\mathbf{E} = \mathbb{N}$. Mostre que $\mathbf{E}$ é fechado e limitado mas que não é compacto.

e. Mostre, de forma mais geral, que se $\mathbf{E}$ for infinito, $\mathbf{E}$ é fechado e limitado mas não compacto.

✍ **Exercício 6.3** Considere, para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, as quantidades

$$||x||_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \qquad ||x||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}, \text{ e } ||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}.$$

a. Mostre que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são normas sobre $\mathbb{R}^n$.

b. Sejam d_1, d_2 e d_∞ as distâncias induzidas pelas normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$, respetivamente.

- Tomando $n = 2$, esboce, para cada uma destas distâncias, as bolas centradas em 0 e de raio 1.
- Mostre que as três distâncias são equivalentes.

✍ **Exercício 6.4** Considere $\mathbb{R}[X]$ o espaço dos polinómios de coeficientes reais.
Seja, para $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$, a quantidade

$$\|P\| = \max\{|a_i| \; : \; 1 \le i \le n\}.$$

a. Mostre que $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ é um espaço normado.

b. Seja $B = \{P \in \mathbb{R}[X] \; : \; \|P\| \le 1\}$.

Mostre que B é fechado, limitado, mas não é compacto.

✍ **Exercício 6.5** Represente geometricamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ e defina analiticamente o interior, a fronteira e o derivado de cada um deles.

a. $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + x \le 2 \wedge xy \ge 0\big\}$.

b. $B = \mathbb{Q}^2$.

c. $C = \left\{\left(\dfrac{n}{2n+1}, y\right) \in \mathbb{R}^2 \; : \; n \in \mathbb{N} \wedge 0 \le y + \dfrac{n}{2n+1} \le 1\right\}$.

d. $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \; : \; y > 0\big\} \setminus \left\{\left(\dfrac{1}{n}, y\right) \in \mathbb{R}^2 \; : \; n \in \mathbb{N} \wedge 0 < y \le 1\right\}$.

6.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

6.1 (a) Claramente $d(f,g) = d(g,f)$ (simetria). É também imediato que $d(f,f) = 0$. Para além disso, se $d(f,g) = 0$, temos que $h = |f-g|$ é uma função contínua não negativa com integral nulo, logo é identicamente igual a zero. Isto pode ser facilmente provado num argumento por absurdo: se existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $h(x_0) > 0$, então escolhendo $\varepsilon = h(x_0)/2 > 0$ vem, por definição de continuidade, que existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $x \in [0,1]$,

$$|x - x_0| < \delta \implies |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon.$$

Seja $c = \max\{0, x_0 - \delta\}$ e $d = \min\{1, x_0 + \delta\}$ (para acomodar o caso em que x está nas extremidades do intervalo $[0,1]$). Vem então que para $x \in [c,d] \subset [0,1]$ temos

$$h(x) \ge h(x_0) - \varepsilon = \varepsilon.$$

Pelo que, pela monotonia do integral e como $h \ge 0$,

$$\int_0^1 h(x)\,dx \ge \int_c^d h(x)\,dx \ge \varepsilon(c-d) \ge \varepsilon\delta > 0$$

e obtemos uma contradição.
Finalmente, a desigualdade triangular é uma consequência simples da monotonia e linearidade do integral, bem como da desigualdade triangular em $\mathbb{R}$.

(b) Não. Basta considerar a função $f = \mathbf{1}_{\{1/2\}}$, a função indicadora de $\{1/2\}$ e $g \equiv 0$, a função nula. Temos $d(f,g) = 0$ mas $f \ne g$.

6.2 (a) A simetria é clara. Se $d(x,y) = 0$, vem imediatamente $x = y$ pela definição. Vemos agora a desigualdade triangular. Sejam $x, y, z \in E$. Se $x = y$, é trivialmente verdade pela não negatividade da distância. Suponhamos que $x \ne y$, então não podemos ter $z = x$ e $z = y$, pelo que $d(x,z) = 1$ ou $d(y,z) = 1$, e assim a sua soma é pelo menos 1, verificando-se então a desigualdade.

(b) Seja $A \subset E$. Seja $x \in A$. Considere-se $\varepsilon = 1/2$. Seja $y \in B_x(\varepsilon)$, então $d(y,x) \le 1/2$, pelo que $x = y$. Isto mostra que $B_x(\varepsilon) = \{x\}$, que claramente está contido em A. O ponto x era arbitrário, logo A é aberto.

(c) Suponhamos que $x_n \to x$. Seja $\varepsilon = 1/2$. Por definição de convergência, a partir de certa ordem temos $x_n \in B_x(\varepsilon) = \{x\}$, que é $x_n = x$.

(d) Claramente é limitado porque $E \subset B_0(2)$ (por exemplo). O complemento é o conjunto vazio, que é aberto, logo E é fechado. Basta considerar a sucessão $x_n = n$. Esta sucessão não tem subsucessões convergentes, porque nunca se verifica que a partir de certa ordem uma subsucessão seja constante.

(e) Basta observar que qualquer conjunto infinito admite um subconjunto que está em bijeção com os naturais.

6.4 (a) É trivial da definição que $\|p\| \geq 0$, e também que $p = 0$ implica $\|p\| = 0$. Se $\|p\| = 0$, então todos os coeficientes são nulos, e p é também nulo. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\|\lambda p\| = \max_i |\lambda a_i| = \max_i |\lambda||a_i| = \lambda| \max_i ||a_i| = |\lambda|\|p\|.$$

Finalmente, a desigualdade triangular pode ser obtida agrupando os coeficientes e utilizando o facto de que

$$\max_i |a_i + b_i| \leq \max_i (|a_i| + |b_i|) \leq \max_i |a_i| + \max_i |b_i|.$$

(b) Provamos até, de forma mais geral, que num espaço métrico (E, d), qualquer bola fechada de raio r

$$\bar{B}_x(r) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq r\}$$

é um conjunto fechado. Seja $A = E \setminus \bar{B}_x(r)$. Seja $y \in E \setminus \bar{B}_x(R)$ qualquer. Então $R = d(x, y) > r$. Seja agora $\varepsilon = (R - r)/2 > 0$. Vamos ver que $B_y(\varepsilon) \subset A$. Temos, para qualquer $z \in B_y(\varepsilon)$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(x, y)$$

pelo que

$$d(x, z) \geq d(x, y) - d(z, y) \geq R - \varepsilon = r + \varepsilon > r.$$

Logo $B_y(\varepsilon) \subset A$. Como $y \in A$ era arbitrário, concluímos que B é fechado.
Para vermos que não é compacto, basta considerar a sucessão $p_n(x) = x^n$. Temos $\|p_n\| = 1$, mas não há nenhuma subsucessão convergente, já que $d(p_n, p_m) = 1$ para qualquer $m \neq n$.

Aula 7 Convergência em espaços métricos

7.1 Súmula dos conteúdos teóricos

Resumo 7.1

- *Sejam (E, d_E), e (V, d_V) dois espaços métricos. Seja $f : D_f \subset E \to V$. Dizemos dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ segundo...*
  - *Cauchy se*
  $$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, d_E(x, a) < \delta \implies d_V(f(x), L) < \varepsilon.$$
  - *Heine se*
  $$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_f, x_n \to a \implies f(x_n) \to f(a).$$

  Em $\mathbb{R}^n$, estas definições são equivalentes.
- *Para o limite segundo um conjunto B basta substituir D_f por $D_f \cap B$ nas definições acima.*
- *Em $\mathbb{R}^2$, os limites segundo conjuntos da forma $B = \{y = a + mx\}$ dizem-se limites direcionais.*
- *Se um limite existe e é igual a L, o limite segundo qualquer conjunto também existe e é igual a L.*
- *Em geral, para provarmos que um limite* ***não existe****, algumas das possibilidades são:*
  - *Encontrar uma sucessão ou conjunto segundo a qual o limite não existe.*
  - *Encontrar duas sucessões/conjuntos segundo as quais os limites existem mas são diferentes.*
- *Se as estratégias acima falharem, por exemplo verificamos que o limite direcional é igual a L independentemente da direção, não podemos concluir se o limite existe ou não, mas podemos concluir que se o limite existir tem de ser igual a L.*
- *Em geral, para provarmos que um limite* ***existe****, algumas das possibilidades são:*
  - *Utilizar desigualdes e o teorema do enquadramento, ou seja, tentar provar que para $x \in \mathbb{R}^n$ numa vizinhança de $p \in \mathbb{R}^n$ se tem*
  $$|f(x) - L| \leq g(x) \to 0, x \to p.$$

    Temos de suspeitar o valor verdadeiro do limite é L. Esta suspeita pode ser obtida utilizando por exemplo um limite direcional.
  - *Utilizar limites conhecidos (notáveis), e para isto a definição de Heine é bastante útil.*

7.2 Exercícios Propostos

Exercício 7.1 Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que

a. A é um conjunto aberto se e só se $A \cap \text{fr}(A) = \emptyset$.

b. A é um conjunto aberto se e só se $\mathbb{R}^n \backslash A$ é um conjunto fechado.

c. Dado um conjunto de índices $\mathcal{I}$ e uma família de conjuntos $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$, mostre que

$$\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i^c.$$

e deduza, utilizando o resultado anterior, que toda a interseção de conjuntos fechados é fechada.

Exercício 7.2 Considere o conjunto $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy > 1\right\}$.

a. Dê um exemplo de uma sucessão de pontos de X convergente para um ponto $l \notin X$.

b. Poderá encontrar uma sucessão de pontos que não pertencem a X convergente para um ponto de X? Justifique.

✍ **Exercício 7.3** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{1 - \ln(x^2 + y^2)} + \sqrt{x - y}.$$

Determine o domínio de f, D_f, represente-o geometricamente e diga, justificando, se D_f é um conjunto aberto e/ou fechado.

✍ **Exercício 7.4** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{(1-x)(1-y)}.$$

a. Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.
b. Defina analiticamente o interior e a fronteira de D_f.
c. D_f é um conjunto aberto? Fechado? Justifique.

✍ **Exercício 7.5** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{\ln\left(1 - 4x^2 - (y+1)^2\right)}.$$

a. Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.
b. Defina analiticamente o interior e a fronteira de D_f.
c. D_f é um conjunto compacto? Justifique.

✍ **Exercício 7.6** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(1 - \sin(x))(y - x^2)}}{\ln(x + y - 2)}.$$

a. Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.
b. Defina analiticamente a fronteira de D_f.
c. D_f é um conjunto aberto? Fechado? Justifique.

✍ **Exercício 7.7** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \sqrt{(x-2)(16 - x^2 - y^2)}.$$

a. Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.
b. Indique, justificando, se D_f é um conjunto compacto.

✍ **Exercício 7.8** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \ln(xy)\sqrt{\left(1 - x^2 - (y-1)^2\right)}.$$

a. Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.
b. Defina analiticamente a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto compacto.

7.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

7.1 (c) Seja

$$A = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c$$

$$B = \bigcap_{i \in I} A_i^c.$$

Vamos primeiro ver a igualdade.

$$\begin{aligned} x \in A &\iff \forall\, i \in I, x \notin A_i \\ &\iff \forall\, i \in I, x \in A_i^c \\ &\iff x \in B. \end{aligned}$$

Suponhamos que $B_i, i \in I$, são fechados. Seja $A_i = B_i^c$. Note-se que qualquer A_i é aberto. Seja

$$D = \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} A_i^c.$$

Queremos provar que D é fechado. Para isso vamos ver que D^c é aberto. De facto, utilizando a igualdade do enunciado temos

$$D^c = \left(\bigcap_{i \in I} A_i^c\right)^c = \left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Sendo este conjunto a união arbitrária de abertos, é aberto.

7.2 (a) Para $x > 0$, a equação é

$$y > \frac{1}{x}.$$

Podemos considerar então $y_n = 1 + 1/n, x_n = 1$. Ou seja

$$u_n = (1, 1 + 1/n) \in X \,\forall\, n \in \mathbb{N}.$$

No entanto

$$u_n \to (1, 1) \notin X.$$

(b) Não. Utilizando o facto que de que $X = f^{-1}(1, +\infty)$, com $f(x, y) = xy$, f contínua, sabemos que X é aberto [1]. Como X é aberto, X^c é fechado, pelo que é igual à sua aderência. Mas a aderência de X^c é o conjunto dos limites de sucessões em X^c, pelo que qualquer sucessão de pontos pertencentes a X^c vai ter limite em X^c, e nunca pode ter limite em X.

7.3 Temos

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0) \wedge x^2 + y^2 \neq e \wedge x \geq y\right\}.$$

Não é aberto porque $(1, 0) \in D_f \cap frD_f$. Não é fechado porque $(0, 0) \in frD_f \setminus D_f$.

7.4 (a)

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\} \setminus \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

(b)

$$intD_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

$$frD_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

(c) Não é aberto porque $(0, -1) \in fr(D_f) \cap D_f$. Não é fechado porque $(1, 0) \in fr(D_f) \setminus D_f$.

12. (a) Temos

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \geq 2 \wedge x^2 + y^2 \leq 16) \vee (x \leq 2 \wedge x^2 + y^2 \geq 16)\right\}$$

(b) Não é compacto porque não é limitado. Por exemplo, com $u_n = (-n-4, 0)$, temos $(u_n) \subset D_f$ e $\|u_n\| \to +\infty$.

[1] Esta proposição está nas aulas seguintes. Em alternativa, pode provar-se diretamente, com mais trabalho. Geometricamente é fácil de ver.

Aula 8 Limites de funções

8.1 Súmula dos resultados teóricos

Resumo 8.1

- *Sejam* (E, d_E), *e* (V, d_V) *dois espaços métricos. Seja* $f : D_f \subset E \to V$. *Dizemos que* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *segundo...*
  - *Cauchy se*
  $$\forall \epsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 : \forall x \in D_f, d_E(x, a) < \delta \implies d_V(f(x), L) < \varepsilon.$$
  - *Heine se*
  $$\forall \, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_f, x_n \to a \implies f(x_n) \to f(a).$$

  Em $\mathbb{R}^n$, *estas definições são equivalentes.*
- *Para o limite segundo um conjunto* B *basta substituir* D_f *por* $D_f \cap B$ *nas definições acima.*
- *Em* $\mathbb{R}^2$, *os limites segundo conjuntos da forma* $B = \{y = a + mx\}$ *ou* $B = \{x = c\}$ *dizem-se limites direcionais.*
- *Se um limite existe e é igual a L, o limite segundo qualquer conjunto também existe e é igual a L.*
- *Em geral, para provarmos que um limite existe, algumas das possibilidades são: provar diretamente da definição, utilizar desigualdades e o teorema do enquadramento, ou utilizar limites já conhecidos.*
- *Uma das formas de provar que um limite não existe é encontrar dois conjuntos tais que os limites segundo esses conjuntos sejam diferentes.*
- *Os* $n!$ *limites iterados em* $\mathbb{R}^n$ *consistem em tomar o limite ao longo de cada direção canónica sucessivamente. Por exemplo em* $\mathbb{R}^2$ *são*
  $$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x, y)$$
  e
  $$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x, y).$$
  O limite de uma função para um certo ponto pode existir sem que existam os limites iterados, mas se o limite existir, e os limites iterados existirem, têm de coincidir.

♠

8.2 Exercícios Propostos

Exercício 8.1 Calcule ou prove que não existem os seguintes limites:

$$(a) \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x-1}{y-x+1} \qquad (b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (c) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^2}{x-y}$$

$$(d) \lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \frac{x+y-2}{xyz} \qquad (e) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2} \qquad (f) \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^3+y-1}{3x^3+y^3-1}$$

$$(g) \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} \qquad (h) \lim_{(x,y,z)\to(0,1,1)} \frac{y^2}{x}(z+3)\sin(4x) \qquad (i) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^4+2y^2}$$

$$(j) \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log^2(x+y)}{\sin(\log(x+y))} \qquad (k) \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-y^2-1}{x-1} \qquad (l) \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2\sqrt{|y-1|}}{x^2+(y-1)^2}$$

$$(m) \lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \frac{z+(x-1)z+z^2}{1-xy+zx}$$

✍ **Exercício 8.2** Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = (x^2+y)\sin\left(\frac{1}{xy}\right)$.

a. Justifique que não existe $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ e não existe $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

b. Prove que existe limite da função no ponto $(0,0)$.

✍ **Exercício 8.3** Estude a continuidade das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin(y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ no ponto $(0,0)$.

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 y^2}{(x-1)^2+y^2} + y & \text{se } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,0) \end{cases}$ no ponto $(1,0)$.

c) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ no ponto $(0,0)$.

✍ **Exercício 8.4** Determine o valor do parâmetro real α de modo que a seguinte função tenha limite no ponto $(1,1)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y} + \alpha & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } y \neq x \\ \dfrac{x^2+1}{y^2+1} - \alpha & \text{caso contrário} \end{cases}$$

✍ **Exercício 8.5** Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$.

a. Considere, para $m \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ o conjunto $A_{k,m} = \left\{(x,y) \in D_f : y = mx^k\right\}$.
Calcule para cada par $(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, o limite de f no ponto $(0,0)$ relativo ao conjunto $A_{k,m}$.

b. Considere o conjunto $X = \left\{(x,y) \in D_f : y = -x + x^2\right\}$.
Calcule o limite de f no ponto $(0,0)$ relativo a X.

c. Que pode concluir sobre a existência de limite de f no ponto $(0,0)$?

8.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

8.1 (a) Consideremos $x = 1 + ym$. Quando $y \to 0$, temos $x \to 1$. Fica então

$$\frac{1+ym-1}{y-ym-1+1} = \frac{m}{1-m}.$$

O limite direcional depende de m, logo o limite não existe.

8.2 Utilizamos a desigualdade

$$|x_i| \leq \|(x_1, x_2, ..., x_n)\|, \forall\, i = 1, 2, ..., n$$

e temos

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |y| \to 0,$$

logo o limite é zero.

(c) Podemos aplicar os limites direcionais $y = mx$ e temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+m^2x^2}{x-mx} = \frac{1}{1-m},$$

que depende de m e portanto o limite não existe.

(d) Como a variável z aparece apenas no denominador, podemos tentar fazer $z \to 0$ à mesma velocidade do numerador e multiplicar por uma constante. Em concreto basta tomar $x_n, y_n \to 1$, por exemplo $x_n = y_n =$

$1+1/n$ e depois $z_n^{(m)} = x_n + y_n - 2$. Se o limite existisse não iria depender de m. No entanto

$$f(x_n, y_n, z_n) = \frac{x_n + y_n - 2}{x_n y_n m(x_n + y_n - 2)} = \frac{1}{m x_n y_n} \to \frac{1}{m}$$

que depende de m. Concluímos que o limite não existe.

(e) O limite não existe porque não existe ao longo do conjunto $y = x^2$ já que nesse caso é

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3},$$

que não existe.

(g) Com $y = m(x-1) + 1, m \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{(x-1) - m(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + m^2(x-1)^2}} \\ &= \frac{(x-1)}{|x-1|} \frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}} \\ &= \text{sinal}(x-1) \frac{(1-m)}{\sqrt{1+m^2}}. \end{aligned}$$

O limite quando $(x,y) \to (1,0)$ ao longo deste conjunto não existe, logo o limite (global) não existe.

8.2 (a) Para $x \neq 0$,

$$\lim_{y \to 0} (x^2 + y) \sin \frac{1}{xy}$$

não existe, porque

$$\lim_{y \to 0} y \sin \frac{1}{xy} = 0$$

mas

$$\lim_{y \to 0} x^2 \sin \frac{1}{xy}$$

não existe.

(b) Como $|\sin z| \leq 1$, temos

$$|f(x,y)| \leq |x^2 + y| \to 0.$$

8.3 (a) Como $x^2 \leq x^2 + y^2$, temos

$$\left| \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2} \right| \leq |\sin y| \to 0 = f(0,0),$$

logo a função é contínua em $(0,0)$.

(b) Como $(x-1)^2 \leq (x-1)^2 + y^2$, temos

$$\left| \frac{(x-1)^2 y^2}{(x-1)^2 + y^2} \right| \leq y^2 \to 0.$$

Como $y \to 0$, vem que f é contínua em $(1,0)$.

(c) Com $y = x$, temos

$$f(x,x) = \frac{1}{2x}$$

e o limite não existe, logo a função não é contínua.

8.5 (a) É

$$\frac{x^2}{x + mx^k} = \frac{x}{1 + mx^{k-1}} \to 0.$$

(b) Temos

$$\frac{x^2}{x - x + x^2} \equiv 1 \to 1.$$

(c) O limite não existe, pois se existisse seria igual segundo o conjunto X e $A_{k,m}$ para qualquer k, m.

Aula 9 Continuidade

9.1 Súmula dos conteúdos teóricos

Resumo 9.1

- *Uma função f diz-se contínua num ponto $a \in D_f$ se*
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$
Se f é contínua para qualquer $a \in A \subset D_f$, diz-se contínua em A.
- *Caso $a \notin D_f$, se $L = \lim_{x\to a} f(x)$, existir, podemos o prolongamento $\bar{f} : D_f \cup \{a\}$ definindo $\bar{f}(a) = L$.*
- *Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ uma função contínua.*
  - *A pré-imagem (também chamada imagem inversa) de um aberto é um aberto.*
  - *A imagem de um compacto é um compacto.*
  - *Para qualquer compacto, a função admite máximo e mínimo nesse compacto.*
- *As seguintes operações preservam continuidade:*
  - *Adição $f + g$*
  - *Multiplicação por um escalar λf, com $\lambda \in \mathbb{R}$*
  - *Multiplicação fg*
  - *Divisão f/g, para $g \neq 0$*
  - *Composição por uma função contínua $f \circ g$*

9.2 Exercícios Propostos

Exercício 9.1 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} k + e^{-\dfrac{1}{|x^2+y^2-4|}} & \text{se } x^2+y^2 > 4 \\ 5 & \text{se } x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}.$$
Determine o valor de k de modo a que a função seja contínua em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 9.2 Verifique se as seguintes funções são prolongáveis por continuidade a $\mathbb{R}^2$:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ $\quad$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$

(d) $f(x,y) = x sen\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

Exercício 9.3 Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x-y}$. A função f é prolongável por continuidade a $\mathbb{R}^2$? Em caso afirmativo determine esse prolongamento.

Exercício 9.4 Determine os pontos de descontinuidade da função definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \\ 1+y & \text{se } x = 0 \\ y & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

Exercício 9.5 Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x(2-\sin(x))}{1-|y|}}$.

a. Determine o domínio de f e represente-o geometricamente.
b. Defina analiticamente a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto e/ou fechado.
c. Justifique se f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,1)$.

9.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

9.2 (a) Notando que $x^2 \leq x^2+y^2$, vem
$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq x \to 0.$$
Podemos prolongar, definindo $\bar{f}(0,0)=0$.

(b) Notando que $x^2, y^2 \leq x^2+y^2$, vem
$$\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \leq y \to 0.$$
Podemos prolongar, definindo $\bar{f}(0,0)=0$.

(c) Com $y = m(x-1)+1, m \neq 0$, temos
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{(x-1)-m(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+m^2(x-1)^2}} \\ &= \frac{(x-1)}{|x-1|}\frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}} \\ &= \text{sinal}(x-1)\frac{(1-m)}{\sqrt{1+m^2}}. \end{aligned}$$
O limite quando $(x,y)\to(1,0)$ ao longo deste conjunto não existe, logo o limite global também não existe e portanto não é possível prolongar por continuidade. Alternativamente podíamos dizer que o limite de $|f(x,y)|$ depende de m, o que também mostra que o limite global não existe.

(d) Temos
$$\left|x\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leq |x| \to 0.$$
Podemos prolongar, definindo $\bar{f}(0,0)=0$.

9.3 O dominio é
$$D_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x\right\}$$
Temos
$$(x-y)(x^2+y^2) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$$
logo
$$\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2+y^2+\frac{x^2y-xy^2}{x-y}.$$
É também
$$xy^2 - x^2y = (x-y)xy.$$
Temos portanto
$$\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2+y^2+xy.$$
O prolongamento é então definir $\bar{f}(x,y) = 3x^2$ para $y=x$.

9.4 Sejam
$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0 \land x \neq 1\},$$
$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = 0\},$$
$$C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = 1\}.$$

Claramente f é contínua em A, porque é uma função racional bem definida.
Em B, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0),x\in A} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{y_0^2}{x^2}$$

Se $y_0 = 0$, então o valor é 0, caso contrário é $+\infty$. No caso $y_0 = 0$ temos $f(0,0) = 1 \neq 0$ logo a função não é contínua nesse ponto. Vem então que a função não é contínua em B.
Finalmente, em C temos

$$\lim_{x\to 1,x\in A} f(x,y) = y^2.$$

Para a função ser contínua num ponto $(1,y) \in C$ temos de ter então $y^2 = y$, que acontece quando $y \in \{0,1\}$. Como os pontos de C apenas são pontos de acumulação de A mas não de B, segue que é f é contínua em $\{(0,1),(1,1)\}$ mas não em nenhum outro ponto de C. Concluímos então que os pontos de descontinuidade são

$$B \cup C \setminus \{(0,1),(1,1)\}.$$

9.5 (a).

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \geq 0 \wedge -1 < y < 1) \vee (x \leq 0 \wedge (y < -1 \vee y > 1))\}.$$

(b).

$$frD_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = -1 \vee y = 1\}.$$

O conjunto não é aberto $(0,0) \in frD_f \cap D_f$ e não é fechado porque $(1,1) \in frD_f \setminus D_f$.

(c). Não porque o limite para o ponto $(0,1)$ não existe. Para ver isto basta considerar o limite direcional $y = 1 - mx$ com $m > 0$. Para x pequeno, $(x,y) \in D_f$ e $y > 0$.
Temos

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{mx}} = \sqrt{\frac{2}{m}},$$

que depende de m.

Aula 10 Diferenciabilidade: derivadas direcionais

10.1 Súmula dos resultados teóricos

Resumo 10.1

- *Para vetores a, v a derivada parcial segundo v é*

$$\frac{\partial}{\partial v} f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

No caso particular $v = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0) =: e_i$ um vetor da base canónica (0 em todas as entradas exceto na i-ésima, onde é 1), temos a derivada parcial

$$\partial f x_i(a)$$

Podemos calcular as derivadas parciais derivando a função

$$g_{a,i}(u) = f(a_1, a_2, ..., u, a_{i+1}, ...a_n),$$

ou seja, tratando as variáveis $x_j, i \neq j$ como constantes.

- *A função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ ser diferenciável em $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ significa que os incrementos de f numa vizinhança de $\boldsymbol{u}$, ou seja $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{u})$ são arbitrariamente bem aproximados por uma aplicação linear. Se essa aplicação linear é D temos*

$$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{u}) \approx D(\boldsymbol{h})$$

para $\boldsymbol{h}$ pequeno. A definição de diferenciabilidade é que

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to 0} \frac{f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{u}) - D\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Caso a função seja diferenciável, à aplicação linear L chama-se Jacobiano Df (ou gradiente ∇f se $d = 1$). ♠

10.2 Exercícios Propostos

✍ **Exercício 10.1** Calcule as funções derivadas parciais de 1^a ordem das seguintes funções, indicando o respectivo domínio:

a. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & se \;\; x \neq 0; \\ y^2 - y & se \;\; x = 0. \end{cases}$ **b**. $g(x,y) = \begin{cases} x^2 - yx & se \;\; x \neq y; \\ x & se \;\; x = y. \end{cases}$

✍ **Exercício 10.2** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & se \;\; (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & se \;\; (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Verifique que a função admite derivadas parciais em todo o seu domínio mas que não é contínua na origem.

✍ **Exercício 10.3** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & se \;\; xy = 0; \\ \sqrt{x^2+y^2} & se \;\; xy \neq 0. \end{cases}$$

a. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b. Prove que não existe $f_v'(0,0)$, qualquer que seja o vector $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $v_1 v_2 \neq 0$.
c. O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$?

✍ **Exercício 10.4** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & se \ \ (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & se \ \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.
b. Mostre que $f(tx,ty) = tf(x,y)$ para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e todo o $t \in \mathbb{R}$.
c. Utilize a alínea anterior para provar que $f_v'(0,0) = f(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.
d. Utilize a alínea anterior para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
e. Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$.

✍ **Exercício 10.5** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} & se \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se \ \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.
b. Calcule o gradiente de f no ponto $(1,1)$.
c. Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$.

✍ **Exercício 10.6** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \ \ (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & se \ \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
b. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ e mostre que são descontínuas em $(0,0)$.
c. Verifique que f é diferenciável na origem.

10.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

10.1 (a) Para $x \neq 0$, qualquer que seja a vizinhança do ponto na direção $(1,0)$ ou $(0,1)$, a função não muda de ramo, logo é:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy\cos xy - \sin xy}{x^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos xy.$$

Para $x = 0$, na direção $(0,1)$ a função é sempre $y^2 - y$, logo vem

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 1.$$

Na direção $(1,0)$ a função muda de ramo e temos de utilizar a definição de derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y)-f(0,y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} h_y(t), \end{aligned}$$

onde

$$h_y(t) := \frac{f(t,y)-f(0,y)}{t} = \frac{y\frac{\sin ty}{ty} - (y^2-y)}{t}. \tag{10.1}$$

Note-se que o numerador tende para $y(2-y)$. Para $y \neq 0,2$, o limite não existe, porque o numerador tende para um número diferente de zero e o denominador tende para zero. Caso contrário podemos aplicar a regra de L'Hôpital porque temos uma indeterminação do tipo $0/0$. Derivando então numerador e denominador fica

$$\frac{ty\cos ty - \sin ty}{t^2}.$$

Temos novamente uma indeterminação do tipo $0/0$, e aplicando novamente a regra fica

$$\frac{y\cos ty - ty^2\sin ty - y\cos ty}{2t} = -\frac{y^2\sin ty}{2} \to 0.$$

Podemos então concluir que $f'_x(0,y) = 0$ para $y = 0,2$. Os domínios são então

$$Dom\frac{\partial f}{\partial x} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0,2\}$$

e

$$Dom\frac{\partial f}{\partial y} = \mathbb{R}^2.$$

(b) Tal como no exercício anterior, quando $y \neq x$ a função não muda de ramo e é

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - y,$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = -x.$$

Nos pontos da forma (b,b), temos ir pela definição.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(b,b) &= \lim_{t\to 0}\frac{g(b+t,t)-g(b,b)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{2bt+t^2-tb-b}{t}.\end{aligned}$$

O numerador tende para $-b$, e o denominador tende para 0, logo o limite não existe existe quando $b \neq 0$. Quando $b = 0$ o limite é zero porque o numerador é identicamente nulo.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(b,b) &= \lim_{t\to 0}\frac{g(b,b+t)-g(b,b)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{-tb-b}{t}.\end{aligned}$$

O numerador tende para $-b$, e o denominador tende para 0, logo o limite não existe existe quando $b \neq 0$. Quando $b = 0$ o limite é zero porque o numerador é identicamente nulo.

10.2 Como $f(t,0) = f(0,t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, vem imediatamente que

$$\partial fx(0,0) = \partial fy(0,0).$$

Para ver que a função não é contínua basta utilizar o limite direcional $y = mx$ e é

$$\lim_{x\to 0}\frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2},$$

que depende de m, logo o limite de f na origem não existe e portanto a função não é contínua na origem.

10.3 (a) Como $f(t,0) = f(0,t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, vem imediatamente que

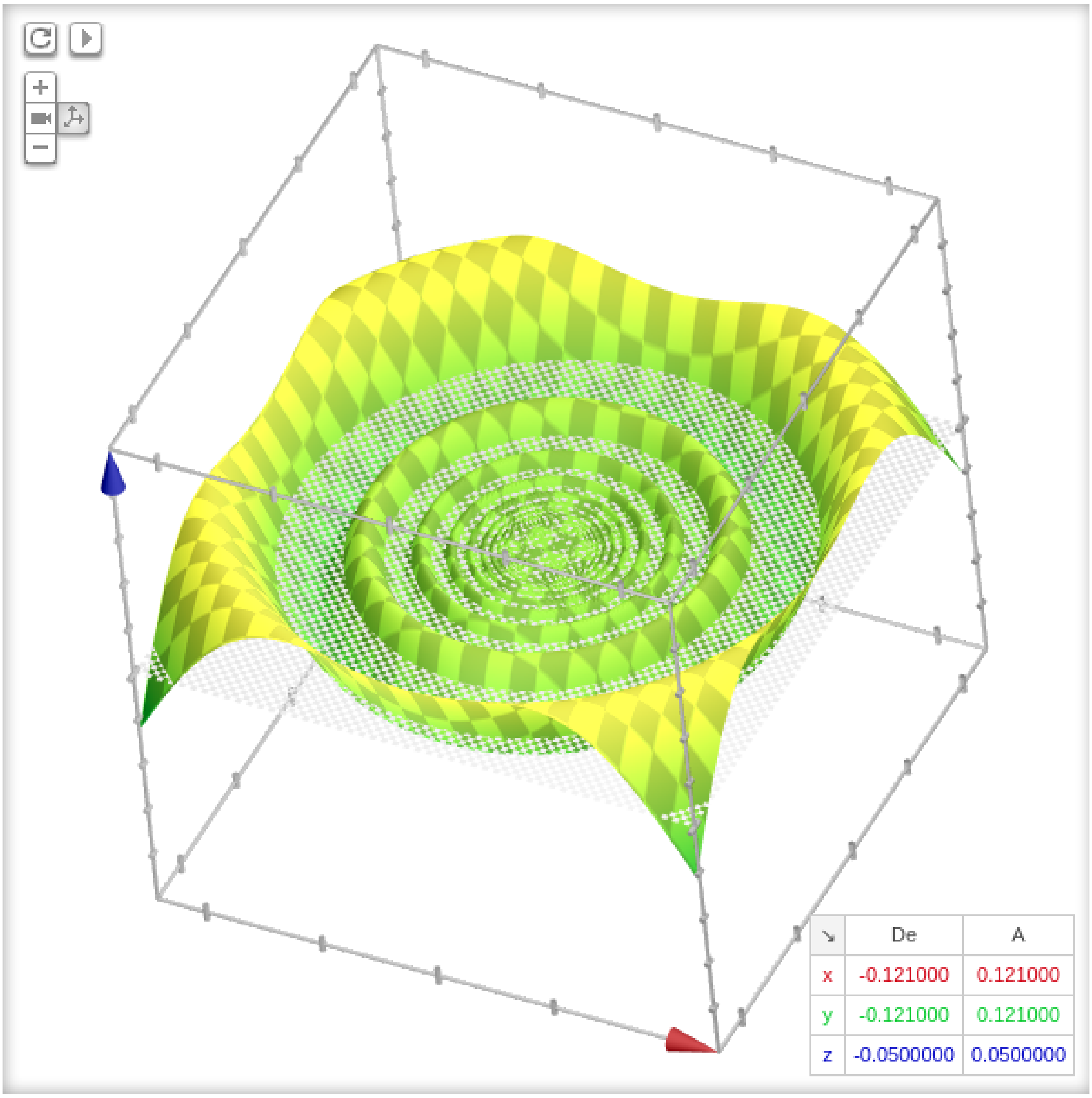
$$\partial fx(0,0) = \partial fy(0,0).$$

(b) Para $v_1v_2 \neq 0$ temos

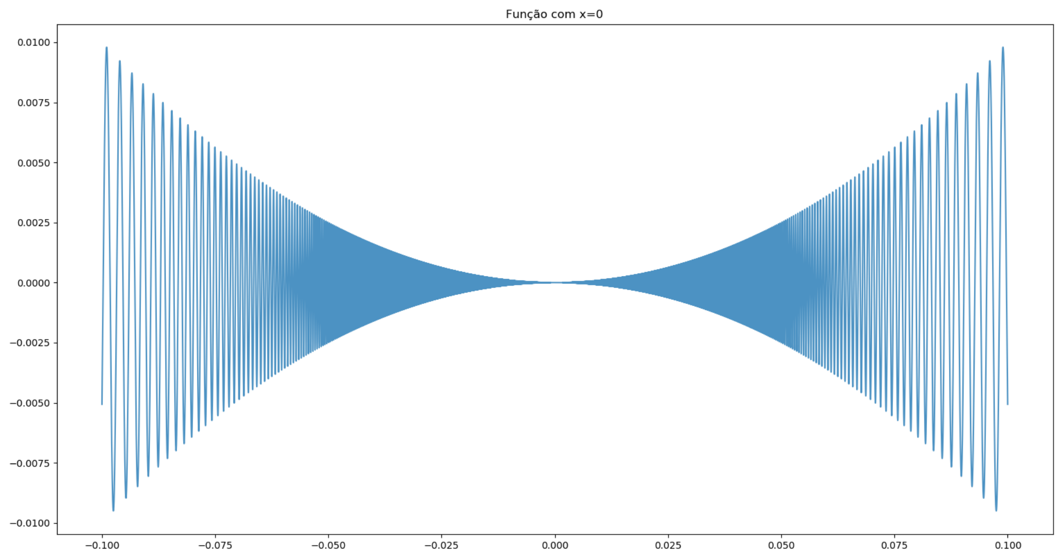
$$\begin{aligned}\partial fv(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t}{|t|}\sqrt{v_1^2+v_2^2}\\ &= \lim_{t\to 0}\sqrt{v_1^2+v_2^2}\,\text{sinal}(t),\end{aligned}$$

e este limite não existe já que $\sqrt{v_1^2+v_2^2} \neq 0$.

10.6 Este é muito interessante na medida em que mostra um contra-exemplo bastante importante na análise diferencial: uma função diferenciável num ponto com derivadas parciais descontínuas nesse ponto. Antes de resolver o exercício é interessante analisar alguns gráficos. A função é quase plana na origem mas tem um número infinito de oscilações. A seguinte imagem mostra a função numa vizinhança pequena perto da origem:



Se fizermos um corte na função com $x = 0$ observamos o seguinte:



Vemos assim a elevada frequência de oscilações, no entanto a função é aproximadamente plana na origem.

(a) Temos de ir pela definição

$$\partial_x f(0,0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

A expressão dentro do limite é

$$\frac{1}{h} h^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^2}} = h \sin \frac{1}{\sqrt{h^2}}.$$

Como $|\sin(\cdot)| \leq 1$, o valor absoluto da expressão acima é majorado por $|h|$ e portanto, pelo enquadramento, o limite é 0. Para a derivada segundo y por simetria - ou seja $f(x,y) = f(y,x)$ - é exatamente a mesma coisa.

(b) Para pontos que não $(0,0)$ temos

$$\partial_x f = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}} - (y^2+x^2) 2x \frac{1}{2(y^2+x^2)^{3/2}} \cos \frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}},$$

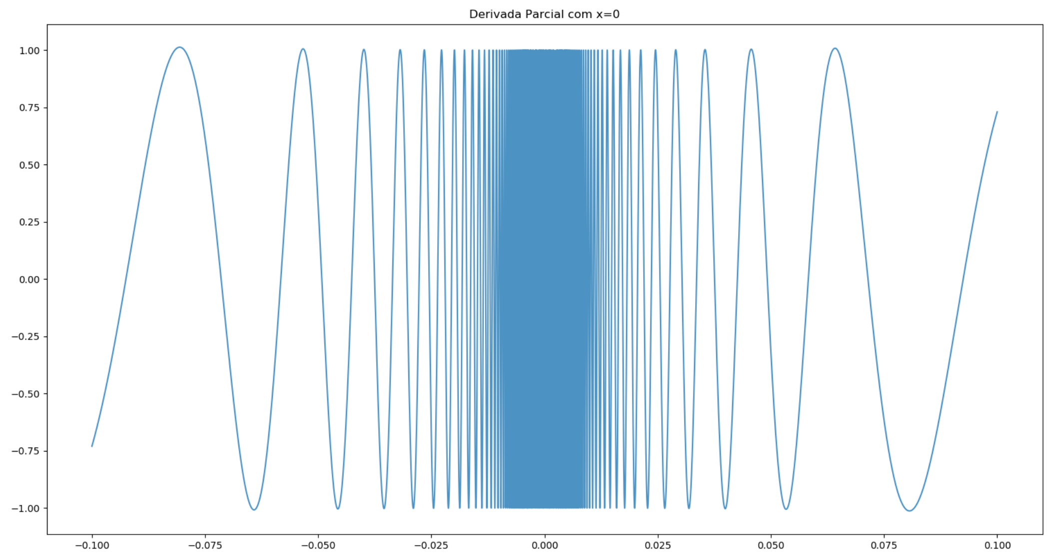
que podemos simplificar para

$$2x \sin \frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}}.$$

Com $y = 0$ é

$$2x \sin \frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|} \cos \frac{1}{|x|} = 2x \sin \frac{1}{|x|} - \text{sinal}(x) \cos \frac{1}{|x|}.$$

O gráfico desta função é:



Esta função obviamente não é contínua na origem porque visita os pontos -1 e 1 um número infinito de vezes. Podemos tornar isto rigoroso facilmente utilizando a definição de Heine: basta encontrarmos sequências $x_n^+, x_n^- \to 0$ tal que a função avaliada em x_n^+, x_n^- tenda para 1 e -1 respetivamente. Assim as sucessões $(x_n^+, 0), (x_n^-, 0)$ em $\mathbb{R}^2$ vão claramente tender para $(0,0)$, mas os limites $\partial_x f(x_n^+, 0), \partial_x f(x_n^-, 0)$ não vão existir, o que prova, pela definição de Heine, que ∂_x é descontínua em $(0,0)$. Outra forma seria argumentar que como $\partial_x f(0,0) = 0$, basta encontrar uma sucessão que vá para $1 \neq 0$.
A alta frequência da função vem do coseno, pelo que vamos encontrar uma sucessão tal que o coseno visite muitas vezes 1. Para isso basta escolher, por exemplo,

$$x_n^+ = \frac{1}{2\pi n}$$

e temos

$$\cos |x_n^+| = \cos 2\pi n = \cos 0 = 1\, \forall n \geq 1.$$

Obviamente com $x_n^- = -x_n^+$ é

$$\cos |x_n^-| = \cos |x_n^+| = 1\, \forall n \geq 1.$$

Na outra parcela é

$$\sin \frac{1}{|x_n^+|} = \sin \frac{1}{|x_n^-|} = \sin 2\pi n = 0$$

e portanto temos

$$\partial_x f(0, x_n^+) = 2x_n^+ \sin \frac{1}{|x_n^+|} - \text{sinal}(x_n^+) \cos \frac{1}{|x_n^+|} \equiv -1$$

e

$$\partial_x f(0, x_n^-) = 2x_n^- \sin \frac{1}{|x_n^-|} - \text{sinal}(x_n^-) \cos \frac{1}{|x_n^-|} \equiv 1.$$

(c) A função é aproximadamente plana perto da origem, o que bate certo com que vimos na alínea a), que mostra que o gradiente é zero. Temos então de analisar o limite

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{f(u,v) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

que é

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(u^2+v^2)\sin\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \sqrt{u^2+v^2}\sin\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

A primeira parecela tende para 0 e a segunda, sendo um seno, é limitada por 1. Pelo enquadramento este limite é 0. Assim, pela definição de diferenciabilidade a função f é diferenciável.

Aula 11 Diferenciabilidade: diferencial e matriz jacobiana

11.1 Súmula dos conteúdos teóricos

Resumo 11.1

- *Para uma função diferenciável, a matriz Jacobiana (ou seja, a matriz que define a aplicação linear $D_a f$ pode ser calculada utilizando as derivadas parciais:*
$$[D_a f]_{i,j} = \partial f_i x_j(a).$$
- *Como para f diferenciável em u se tem para $v \neq 0$,*
$$\frac{\partial}{\partial v} f(u) = \nabla f(u) \cdot v,$$
se esta igualdade não se verificar para um certo vetor v fica provado que f não é diferenciável. Se se verificar não podemos concluir nada.
- *Outra proposição importante diz que se todas as derivadas de f existirem e forem contínuas um u então f é diferenciável em u.*
- *Outra propriedade importante de uma função diferenciável é que é contínua, e admite a existência de todas as derivadas direcionais (em particular das parciais). Se uma função não for contínua ou alguma derivada direcional não existir sabemos que não é diferenciável.*
- *O teorema da derivada da função composta diz-nos que se g, f forem diferenciáveis em a, b respetivamente, onde $b = g(a)$ então a matriz Jacobiana da composição é o produto das Jacobianas (ou seja, o Jacobiano da composição é a composição dos Jacobianos):*
$$D_a(f \circ g) = D_b(f) D_b(g).$$
- *Para funções escalares podemos escrever na forma da regra em cadeia*
$$\frac{\partial}{\partial t} f(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}$$
- *Podemos utilizar a seguinte estratégia:*
  - *Para provar que f é diferenciável*
    - *Calcular o Jacobiano Df utilizando as derivadas parciais e provar que se verifica condição que vem na definição de diferenciabilidade com $L = Df$.*
    - *Calcular as derivadas parciais e verificar que são contínuas (i.e. ver que f é de classe C^1). Note-se que mesmo que f não seja de classe C^1 pode ser diferenciável.*
  - *Para provar que f não é diferenciável:*
    - *Verificar que f não é contínua.*
    - *Verificar que alguma das derivadas direcionais (em particular parciais) não existe.*
    - *Encontrar $v \neq 0$ tal que*
$$\nabla f \cdot v \neq f'_v.$$
    - *Calcular o Jacobiano Df utilizando as derivadas parciais e provar que falha a condição que vem na definição de diferenciabilidade com $L = Df$.*

11.2 Exercícios Propostos

Exercício 11.1 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x-y)}{x+y} & se \;\; x+y \neq 0; \\ 0 & se \;\; x+y = 0. \end{cases}$$

a. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b. Existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ nos pontos da forma $(a,-a)$ com $a \neq 0$?

c. Calcule uma expressão para a função derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e estude a sua continuidade.

d. Calcule $f'_{(1,-1)}(2,3)$.

e. Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.

f. Estude a diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}^2$.

g) Calcule $\nabla f(1,0)$.

h) Calcule $f'_{(1,1)}(0,0)$ e $f'_{(1,1)}(1,0)$.

✍ **Exercício 11.2** Seja h uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e f a função definida pela expressão

$$f(x,y) = \tan(x)h(x+\cos y).$$

Mostre que para todo o ponto $(x,y) \in D_f$ se tem

$$\sin(y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)\frac{\sin(y)}{\cos^2 x}.$$

✍ **Exercício 11.3** Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ e g a função definida por $g(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
Mostre que para todo o ponto $(x,y) \in D_g$, se tem

$$x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x,y).$$

✍ **Exercício 11.4** Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e g a função definida pela expressão

$$g(x,y) = \cos^2(x)f(y+\tan(x)).$$

Prove que para todo o ponto $(x,y) \in D_g$ se tem

$$\frac{1}{\cos^2(x)}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2\tan(x)g(x,y).$$

✍ **Exercício 11.5** Usando a regra da derivada da função composta, calcule $\dfrac{dw}{dt}$ sabendo que

$$w = xyf(z),\ x = t^2,\ y = e^t \text{ e } z = \ln(t^2),$$

onde f é uma função real de variável real diferenciável.

✍ **Exercício 11.6** Seja F uma função real de variável real diferenciável e $z = xy + xF\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
Mostre que para todo o $x \neq 0$ se tem

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

✍ **Exercício 11.7** Sejam $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2 e $z = x\phi(x+y) + y\psi(x+y)$.
Mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

✍ **Exercício 11.8** Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $v(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.
Mostre que $\phi = u \circ v$ é verifica

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

✍ **Exercício 11.9** Considere as funções $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y, z) = (e^{x^2+y^2+z^2}, 1 - xyz^2)$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, uma função cuja matriz jacobiana no ponto $(e^3, 2)$ é dada por

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz jacobiana de $f \circ g$ no ponto $(1, -1, 1)$.

11.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

10.3 (c) Não é diferenciável, pois existe um vetor $v \neq 0$, por exemplo $v = (1, 1)$, para o qual f'_v não existe.

10.6 (c) A função é aproximadamente plana perto da origem, o que bate certo com que vimos na alínea a), que mostra que o gradiente é zero. Temos então de analisar o limite

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{f(u, v) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

que é

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(u^2 + v^2) \sin \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \sqrt{u^2 + v^2} \sin \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

A primeira parecela tende para 0 e a segunda, sendo um seno, é limitada por 1. Pelo enquadramento este limite é 0. Assim, pela definição de diferenciabilidade a função f é diferenciável.

10.4 (a). Temos

$$\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \to 0$$

(b). Para $(x, y) \neq (0, 0)$ e $t \neq 0$ temos

$$f(tx, ty) = \frac{t^3 xy^2}{t^2(x^2 + y^2)} = tf(x, y).$$

No caso $(x, y) \neq (0, 0)$ e $t = 0$ temos

$$f(tx, ty) = f(0, 0) = 0 \times f(x, y) = tf(x, y).$$

Finalmente, para $(x, y) = (0, 0)$ é

$$f(tx, ty) = f(0, 0) = 0 = t \times 0 = tf(x, y).$$

(c). Com $v = (v_1, v_2)$ temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0, 0) + t(v_1, v_2)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tf(v_1, v_2)}{t} = f(v_1, v_2).$$

(d).

$$\partial f x(0, 0) = \partial f x(0, 0) = f(0, 0) = 0.$$

(e). Se f fosse diferenciável, seria

$$f'_v(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot v.$$

No entanto, com $v = (1, 1)$ temos

$$f'_v(0, 0) = f(1, 1) = \frac{1}{2} \neq \nabla f(0, 0) \cdot v.$$

10.5 (a). Para $(x, y) \neq (0, 0)$ é claramente contínua pois é uma função racional. Para $(x, y) = (0, 0)$ temos de verificar se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1.$$

Mas

$$f(x, y) = 1 - \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$$

e como $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ vem que

$$\left|\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}\right| \leq (x^2+y^2)^2 \to 0$$

e vem $f(x,y) \to 1 = f(0,0)$. Concluímos então que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b). Temos

$$\partial fx(x,y) = y\frac{3x^2(x^2+y^2) - x^3 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

para $(x,y) \neq (0,0)$. Para $(x,y) = (1,1)$ é

$$-\frac{3 \times 2 - 2}{4} = -1.$$

Por simetria - i.e. $f(x,y) = f(y,x)$ - também é

$$\partial fy(1,1) = -1.$$

Vem então

$$\nabla f(x,y) = [-1,-1] \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

(c). Basta provar que

$$\varepsilon(h) := \frac{f(h) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot h}{\|h\|} \to 0.$$

Temos

$$\partial fx(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-0-1}{t} = 0.$$

e também por simetria

$$\partial fy(0,0) = 0.$$

Mas é então, com $h = (h_1, h_2)$ é

$$|\varepsilon(h)| = \left|\frac{h_1^3h_2^3}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \leq |h_1|h_2^2 \to 0.$$

11.2 NOTA: no enunciado havia um erro e estava f em vez de h.
Utilizando a regra em cadeia temos

$$\partial fx = h(x+\cos y)\tan' x + h(x+\cos y)\tan x.$$

e

$$\partial fy = -h'(x+\cos y)\tan x \sin y.$$

Vem então

$$\partial fx \sin y + \partial fy = h(x+\cos y)\frac{\sin y}{\cos^2 x}.$$

11.6

$$\partial zx = y + F\left(\frac{y}{x}\right) - x\frac{y}{x^2}F'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\partial zy = x + x\frac{1}{x}F'\left(\frac{y}{x}\right)$$

Logo é

$$x\partial zx = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right) - yF'\left(\frac{y}{x}\right) = z - yF'\left(\frac{y}{x}\right)$$

e

$$y\partial zy = xy + yF'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Fica então

$$x\partial zx + y\partial zy = xy + z.$$

11.9 NOTA: no enunciado devia dizer também que f é diferenciável em $(e^3, 2)$. Seja $a = (1,-1,1)$ e $b = g(a) = (e^3, 2)$.

Como f é diferenciável em b e g é diferenciável em a temos, pelo teorema da derivada da função composta,

$$D_a(f \circ g) = D_b(f) D_a(g).$$

Falta apenas calcular $D_a(g)$. Calculando as derivadas parciais vem

$$D_{(x,y,z)} g = \begin{bmatrix} 2xe^{x^2+y^2+z^2} & 2ye^{x^2+y^2+z^2} & 2ze^{x^2+y^2+z^2} \\ -yx^2 & -xz^2 & -2zxy \end{bmatrix}.$$

e portanto

$$D_{(1,-1,1)} g = \begin{bmatrix} 2e^3 & -2e^3 & 2e^3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vem então

$$D_a(f \circ g) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^3 & -2e^3 & 2e^3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^3 & 2e^3 & -2e^3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Aula 12 Diferenciabilidade e Formas quadráticas

12.1 Súmula dos conteúdos teóricos

Resumo 12.1

Formas Quadráticas

1. *Existe uma única matriz* ***simétrica*** *associada a cada forma quadrática.*
2. *Para construir a matriz simétrica a partir da expressão da forma quadrática*

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} c_{i,j}x_ix_j$$

a entrada $A_{i,j} = A_{j,i} = c_{i,j}/2$ se $i < j$ e $A_{i,i} = c_{ii}$. Como a matriz é simétrica, não importa a ordem das incógnitas. Os termos dos quadrados estão sempre na diagonal. As entradas que não forem preenchidas são zero.

3. *Classificação das formas quadráticas, utilizando a definição e os valores próprios.*
   (a). *Definidas Positivas: $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0\,\forall\,\boldsymbol{x} \neq 0$. Todos os valores próprios são positivos.*
   (b). *Definidas Negativas: $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} < 0\,\forall\,\boldsymbol{x} \neq 0$. Todos os valores próprios são negativos.*
   (c). *Semi-Definidas Positivas: $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \geq 0\,\forall\,\boldsymbol{x} \neq 0$. Zero é valor próprio e todos os outros são positivos.*
   (d). *Semi-Definidas Negativas: $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \leq 0\,\forall\,\boldsymbol{x} \neq 0$. Zero é valor próprio e todos os outros são negativos.*
   (e). *Indefinidas. Não satisfaz nenhuma das acima. Em relação aos valores próprios é dizer que existem valores próprios de valores contrários.*

4. *Classificação por menores principais. Suponhamos que* $|A| \neq 0$, *então*
   - *Se* $\Delta_k > 0 \, \forall \, k = 1, ..., n$, *então* A *é definida positiva.*
   - *Se* $\Delta_k(-1)^k > 0 \, \forall \, k = 1, ..., n$, A *então é definida negativa.*
   - *Em todos os outros casos* A *é indefinida.*

   NOTA: caso $|A| = 0$, *nada podemos concluir utilizando este critério.*

Cálculo Diferencial

- *O teorema da derivada da função composta diz-nos que se* g, f *forem diferenciáveis em* a, b *respetivamente, onde* $b = g(a)$ *então a matriz Jacobiana da composição é o produto das Jacobianas (ou seja, o Jacobiano da composição é a composição dos Jacobianos):*
$$D_a(f \circ g) = D_b(f)D_a(g).$$
- *Para funções escalares podemos escrever na forma da regra em cadeia*
$$\frac{\partial}{\partial t} f(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}$$
- *Podemos utilizar a seguinte estratégia:*
  - *Para provar que* f *é diferenciável*
    - *Calcular o Jacobiano* Df *utilizando as derivadas parciais e provar que se verifica condição que vem na definição de diferenciabilidade com* $L = Df$.
    - *Calcular as derivadas parciais e verificar que são contínuas (i.e. ver que* f *é de classe* C^1*). Note-se que mesmo que* f *não seja de classe* C^1 *pode ser diferenciável.*
  - *Para provar que* f *não é diferenciável:*
    - *Verificar que* f *não é contínua.*
    - *Verificar que alguma das derivadas direcionais (em particular parciais) não existe.*
    - *Encontrar* $v \neq 0$ *tal que*
$$\nabla f \cdot v \neq f'_v.$$
    - *Calcular o Jacobiano* Df *utilizando as derivadas parciais e provar que falha a condição que vem na definição de diferenciabilidade com* $L = Df$.

12.2 Exercícios Propostos

Exercício 12.1 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = f'(1) = 2$ e $f(2) = f'(2) = 1$. Considere $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$g(x, y, z) = (f(x^2) + f(x^2 + y^2), f(xyz)).$$

a. Calcule a matriz jacobiana de g.

b. Sendo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = e^{3-x^2+yx}$, justifique que $h \circ g$ é diferenciável no ponto $(1, 1, 2)$ e calcule a matriz jacobiana de $h \circ g$ nesse ponto.

Exercício 12.2 Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^{5/3}y^2}{(x^2 + y^2)^{4/3}} & se \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & se \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(t) = (t, t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere ainda a função $F = f \circ g$.

a. Indique o valor de $F(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

b. Calcule o valor de $F'(0)$ de duas formas:

i) utilizando a expressão de $F(t)$ obtida na alínea anterior;
ii) através da regra da derivação da função composta, admitindo que f é diferenciável.

c. O que pode concluir do facto de ter obtido diferentes resultados nas alíneas i) e ii)?

12.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

12.2 (a). Para $t \neq 0$ é

$$F(t) = g(t,t) = \frac{t^{5/3}t^2}{2^{4/3}t^{2\times 4/3}} = \frac{t}{2^{4/3}}.$$

Para $t = 0$ é

$$F(t) = g(t,t) = g(0,0) = 0 = \left.\frac{t}{2^{4/3}}\right|_{t=0}.$$

Logo

$$F(t) = \frac{t}{2^{4/3}} \, \forall t \in \mathbb{R}.$$

(b). I. Utilizando a expressão é

$$F'(0) = \frac{1}{2^{4/3}}.$$

II. Pela regra da função composta é

$$F'(0) = D_0(f \circ g) = \nabla f(0,0) D_0 g.$$

É fácil ver que $Dg \equiv [1,1]$. Para calcular ∇f calculamos as derivadas parciais

$$\partial f x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$
$$\partial f y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

Logo

$$F'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

(c). Apenas teríamos garantia que fossem iguais se f fosse diferenciável na origem. Desta forma, podemos concluir que f não é diferenciável na origem.

11.1 (a).

$$\partial f x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1.$$

$$\partial f y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

(b). Seja $a \neq 0$. Se avaliarmos o quociente

$$\frac{f(a+t,-a) - f(a,-a)}{t} = \frac{(a+t)(a+t+a)}{t^2},$$

vemos que o numerador tende para $2a^2 \neq 0$, mas o denominador tende para zero, logo o limite não existe (em $\mathbb{R}$) e portanto a derivada não existe nestes pontos.

(c). Para $x + y \neq 0$ temos

$$\partial f x(x,y) = \frac{x^2 - y^2 + 2xy}{(x+y)^2}.$$

Para $x = y = 0$ é 1 (por (a)), e nos restantes casos não existe (por (b)).
É fácil ver que é descontínua em $(0,0)$, estudando os limites direcionais $y = mx, m \neq -1$,

$$\partial f x(x,mx) = \frac{x^2 - mx^2 + 2mx^2}{x^2(1+m)^2} = \frac{1 - m^2 + 2m}{(1+m)^2},$$

que depende de m. Nos restantes pontos do seu domínio é contínua, pois é uma função racional.

(d). A função f é uma função racional numa vizinhança de qualquer ponto (x, y) tal que $x + y \neq 0$, logo é diferenciável nesses pontos. O ponto $(2, 3)$ é um desses pontos, logo podemos calcular a derivada direcional utilizando o gradiente.

$$\partial fy(x, y) = \frac{-x(x+y) - x(x-y)}{(x+y)^2} = -\frac{2x^2}{(x+y)^2}.$$

Utilizando cálculo da alínea (c) vem

$$\nabla f(2, 3) = [7/25, -8/25].$$

É então

$$f_{(1-1)}(2, 3) = \nabla f(2, 3) \cdot (1, -1) = \frac{3}{5}.$$

(e). A função não é contínua em $\mathbb{R}^2$, porque não é contínua nos pontos da forma $(a, -a), a \in \mathbb{R}$. Podemos considerar o limite segundo os conjuntos $y = mx(x-a)^2 - (x-a) - a$. Em geral temos

$$f(x, mx(x-a)^2 - (x-a) - a) = \frac{x(2x - m(x-a)^2)}{m(x-a)^2}.$$

O numerador tende para $2a^2$ e o denominador tende para 0, logo o limite não existe quando $a \neq 0$. No caso $a = 0$ é

$$\frac{x(x - (mx^2 - x))}{x + mx^2 - x} = \frac{2 - mx}{m} \to \frac{2}{m},$$

que depende de m, e portanto o limite (global) também não existe.

Nos pontos $x + y \neq 0$ é contínua, pois é uma função racional.

(f). A função é diferenciável para $x + y \neq 0$, pois é uma função racional. Nos restantes pontos não é, pois não é contínua.

(g). Utilizando a expressão calculada na alínea (d), é

$$\nabla f(1, 0) = [1, -2]$$

(h). A função não é diferenciável em $(0, 0)$ logo temos de calcular o limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Em $(1, 0)$ a função é diferenciável, logo podemos proceder como em (d) e obter

$$f_{(1,1)}(0, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot (1, 1) = (1, -2) \cdot (1, 1) = -1.$$

12.1 (a). Utilizando as derivadas parciais facilmente obtemos que, com $u(x, y, z) = x^2, v(x, y, z) = x^2+y^2, w(x, y, z) = xyz$, é

$$Dg = \begin{bmatrix} 2x(f'(u) + f'(v)) & 2yf'(v) & 0 \\ yzf'(w) & xzf'(w) & xyf'(w) \end{bmatrix}.$$

(b). As funções u, v, w são polinómios, e logo diferenciáveis. Como f é diferenciável, vem que $f \circ u + f \circ v$ e $f \circ w$ são diferenciáveis. Vem então que g é diferenciável. Como h é a composição da exponencial com um polinómio, é diferenciável, e portanto $h \circ g$ é diferenciável. Pelo teorema da derivada da função composta é

$$D_a(h \circ g) = D_b(h)D_a(g),$$

onde $a = (1, 1, 2)$ e $b = g(a) = (3, 1)$. Temos

$$D_a(g) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

É também

$$Dh = \begin{bmatrix} (-2x+y)e^s & xe^s \end{bmatrix},$$

onde $s(x, y) = 3 - x^2 + yx$. No ponto b é

$$D_b(h) = e^{-3} \begin{bmatrix} -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$D_a(h \circ g) = e^{-3} \begin{bmatrix} -24 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Formas Quadráticas

Classificar matrizes. Vamos tentar usar os menores sempre que possível, quando não for possível, utilizamos os valores próprios.

1. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

   O determinante, se possível utilizo calculando os menores (para poupar trabalho).

   $$|A| = (-3)\Delta_2 + (-1)(0+7) = -3\Delta_2 - 7$$

   É fácil ver que $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 7 - 4 = 3 > 0$. E portanto

   $$|A| = -9 - 7 = -16 < 0.$$

   A matriz é indefinida.

2. $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   O determinante é

   $$|A| = (-1)(-2)(2-0) = 4 > 0$$

   Os menores são $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = -4 < 0$.
   A matriz é indefinida.

3. $$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

   O determinante é $|A| = 18 - 4 = 12 > 0$. Ainda $\Delta_1 > 0$.
   A matriz é definida positiva.

4. Classifique em função de $a \in \mathbb{R}$:

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}.$$

   O determinante é $|A| = a - 4 = 0$. Se $a > 4$, $|A| > 0$ e é $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ e vem $A > 0$. Se for $a < 4$, $|A| < 0$ é e $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ pelo que $A < 0$. Se $a = 4$ é

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Temos de ver os valores próprios, a equação característica é

   $$(1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0,$$

   que é se e só se,

   $$4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

   e é

   $$\lambda(\lambda - 5) = 0.$$

   Portanto $\lambda_2 = 5 > 0$ é o outro valor próprio. No caso $a = 0$ a matriz é semi-definida positiva.

5.
$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

O determinante, que é Δ_2, é $-26 < 0$. E $\Delta_1 < 0$.
A matriz é indefinida.

6.
$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

O determinante é $\Delta_2 = 25 - 1 = 24 > 0$. Temos $\Delta_1 = -5 < 0$.
A matriz é definida negativa.

7. Classifique em função de $a \in \mathbb{R}$:
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

O determinante, começando pela última linha para usar os menores como cálculo intermédio, é
$$|A| = 7\Delta_3.$$
Vemos que $\Delta_3 = 3(2 - a^2)$, e vem então
$$|A| = 21(2 - a^2).$$
A situação em que $|A| = 0$ é a mais difícil porque é inconclusivo. Vamos fazer esta primeiro: suponhamos que $a = \pm\sqrt{2}$. Vamos ter de achar os valores próprios:
$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & a & 0 \\ 0 & a & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(7-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)(7-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda) - 2].$$
Duas das raízes são imediatamente $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 7$. As outras raízes são dadas pela solução de
$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda(\lambda - 3) = 0$$
que são $\lambda_3 = 0$ e $\lambda_4 = 3$. Logo neste caso a matriz é semi-definida positiva.
Se $a \notin \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, calculamos os menores:
$$\Delta_1 = 3 > 0.$$
$$\Delta_2 = 3 > 0.$$
$$\Delta_3 = 3(2 - a^2).$$
$$\Delta_4 = 21(2 - a^2).$$
Se $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$, então ambos são positivos é definida positiva. Caso contrário é indefinida.

Aula 13 Otimização livre

13.1 Súmula dos conteúdos teóricos

Resumo 13.1

- *Uma função diz-se de classe* C^p *se todas as derivadas parciais de ordem* p *existem e são contínuas. Uma função que seja de classe* C^p *para todo o* p *diz-se de classe* C^∞.
- *A matriz Hessiana é definida por*

$$H_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

- *Se* $f \in C^2$, *o teorema de Schwarz assegura-nos que a matriz Hessiana é simétrica.*
- *Dada uma função diferenciável num aberto, qualquer extremante é ponto crítico, mas o converso não é verdadeiro.*
- *Aos pontos críticos que não são extremantes chamamos pontos sela.*
- *A seguinte estratégia permite encontrar extremantes no caso da função ser de classe* C^2.
  1. *Calcular o gradiente da função.*
  2. *Encontrar os pontos críticos, ou seja, aqueles onde o gradiente se anula.*
  3. *Calcular a matriz Hessiana e avaliar a expressão nos pontos críticos encontrados no passo anterior.*
  4. *Classificar a matriz Hessiana (forma quadrática):*
     (a). *Calcular* $\det H$.
     (b). *Caso* $\det H \neq 0$ *calcular os menores principais* Δ_i *e utilizar os mesmos para classificar a matriz.*
     (c). *Caso* $\det H = 0$, *calcular os valores próprios.*
  5. *Classificar o ponto crítico de acordo com a classificação da matriz.*
     (a). *Definida negativa – máximo local*
     (b). *Definida positiva – mínimo local*
     (c). *Indefinida – ponto de sela*
     (d). *Semi-definida positiva – poderá ser um minimizante ou um ponto de sela, mas não podemos concluir qual.*
     (e). *Semi-definida negativa – poderá ser um maximizante ou um ponto de sela, mas não podemos concluir qual.*
  6. *No caso da matriz Hessiana ser semi-definida positiva ou semi-definida negativa, realizar uma análise ad hoc, i.e. tentar classificar o ponto crítico diretamente a partir da expressão da função.*

Teorema de Taylor em $\mathbb{R}^p$ *Seja* $f : D \subset \mathbb{R}^p$ *com* D *aberto e* $f \in C^d(D)$. *Então*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{k!}\sum_{k=1}^{d} D^k f(a)h + \|h\|^d \varepsilon(h),$$

com $\varepsilon(h) \to 0$ *quando* $h \to 0$, *e onde* $D^k f(a)h$ *é o diferencial de ordem* k *de* f *em* a *aplicado a* h, *ou seja*

$$D^k f(a)h = \sum_{i_j \in \{1,\ldots,p\}} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}(a) h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_k}.$$

No caso particular $d = 2$ *é*

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H f(a) h + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

Teorema da Função Inversa

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *com* D *aberto e* $f \in C^1(D)$. *Seja* $a \in D$. *Se* $D_a f$ *for invertível, então existem vizinhanças* U *de* a *e* V *de* $f(a)$ *tais que*

- $f\big|_U : U \to V$ *é bijetiva*

- $f^{-1} = \left(f\big|_U\right)^{-1} \in C^1(D)$
- $D_y f^{-1} = [D_x f]^{-1}$ *para* $y = f(x), x \in U$.

Teorema da Função Implícita
Seja $F : D \subset \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$, *$D$ aberto,* $F \in C^1(D)$. *Seja* $(a,b) \in \mathbb{R}^{n+p}$ *com* $F(a,b) = 0$. *Seja* $J_v F$ *a matriz de derivadas parciais de F com respeito às coordenadas* $v_1, ..., v_p$. *Se for invertível, ou seja, se*

$$\det J_v F(a,b) \neq 0,$$

então existem vizinhanças U de a e V de b tais que, em $U \times V$ a equação $F(u,v) = 0$ é o gráfico de uma função $f \in C^1(U)$, *ou seja*

$$\forall\, (u,v)\ \in U \times V,\ F(u,v) = 0 \iff v_i = f_i(u_1, ..., u_n)\,\forall\, i = 1, ..., p,$$

onde $f \in C^1(U)$. *Em particular* $f(a) = b$. *Adicionalmente, a matriz Jacobiana de f em $u \in U$ é dada por*

$$Df(u) = -\left[J_v F(u, f(u))\right]^{-1} J_u F(u, f(u)).$$

13.2 Exercícios Propostos

Exercício 13.1 Determine os extremantes e correspondentes extremos da função f, nos seguintes casos:

a. $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^y$;
b. $f(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$;
c. $f(x,y,z) = xy + xz$;
d. $f(x,y) = x\sin(y)$;
e. $f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^4$.

Exercício 13.2 Averigue se o ponto $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$ é extremante da função definida por

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xy^2 + y^4 + z^2.$$

Exercício 13.3 Determine, em função do parâmetro $\beta \in \mathbb{R}$, os extremantes da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y,z) = xy + xz - x^3 - y^2 - \beta x.$$

Exercício 13.4 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = e^{xy + xy^2 + x^2}.$$

Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

Exercício 13.5 Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = (x-y)^2 - x^4 - y^4$.

a. Prove que os pontos críticos de f são $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(0,0)$.

b. Indique, justificando, se os pontos $(1,-1)$ e $(-1,1)$ são extremantes da função f e, caso o sejam, determine os valores extremos de f.

c. Prove que o ponto $(0,0)$ não é extremante da função f.

13.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

18. (a). O gradiente é

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^y 2x; & 2ye^y + x^2e^y + y^2e^y \end{bmatrix}.$$

Os pontos críticos são

$$\{(0,0),(0,-2)\}$$

A função $f \in C^2$ e a sua matriz Hessiana é

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2e^y & 2xe^y \\ 2xe^y & e^y(2y+x^2+y^2)+e^y(2+2y) \end{bmatrix}.$$

Avaliando nos pontos críticos temos

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

definida positiva, logo $(0,0)$ é minimizante. Para o outro ponto é

$$H(0,-2) = \begin{bmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{bmatrix},$$

que é indefinida e portanto $(0,-2)$ é ponto sela.

(b). O gradiente é

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x+4y-8; & 4x-2y-6 \end{bmatrix}.$$

Igualando $\nabla f = 0$ obtemos um sistema linear cuja única solução é $(2,1)$. A função $f \in C^2$ e a sua matriz Hessiana é constante

$$H(x,y) \equiv \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

O determinante é $\Delta_2 = -20 \neq 0$. Como $\Delta_1 > 0$ concluímos que H é indefinida, e portanto $(2,1)$ é ponto de sela. Não há extremantes.

13.1 O gradiente é

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} y+z; & x; & x \end{bmatrix}.$$

Os pontos críticos são

$$\{(0,a,-a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

A função $f \in C^2$ e a sua matriz Hessiana é constante e igual a

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz não é invertível, pelo que não vamos utilizar a classificação por menores principais mas sim pelos valores próprios.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-2).$$

Como $\lambda_1 = \sqrt{2} > 0$ é valor próprio e $\lambda_2 = -\sqrt{2} < 0$ também é valor próprio, segue que a matriz é indefinida e portanto todos os pontos críticos são pontos sela. Não há extremantes.

(c). O gradiente é

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \sin y; & x\cos y \end{bmatrix}.$$

Os pontos críticos são

$$\{(0,\pi n), n \in \mathbb{Z}\}$$

A função $f \in C^2$ e a sua matriz Hessiana é

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x\sin y \end{bmatrix}.$$

Avaliando nos pontos críticos temos

$$H(0,\pi n) = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^n \\ (-1)^n & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\Delta_1 = 0$ e $\Delta_2 = -1$ a matriz é indefinida. Desta forma, não há extremantes todos os pontos da forma $(0, \pi n)$ são pontos de sela.

13.2 O gradiente é

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x + 2y^2; & 4xy + 4y^3; & 2z \end{bmatrix}.$$

Seja

$$a = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Como $\nabla f(a) = 0$, não podemos afastar a hipótese de a ser extremante, mas também não podemos concluir que é. Como $f \in C^2$, vamos utilizar a matriz Hessiana:

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 4y & 0 \\ 4y & 4x + 12y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Avaliando no ponto é

$$H(a) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como $\det H(a) = 0$, vamos pelos valores próprios. Temos

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\lambda(\lambda-4),$$

logo os valores próprios são $\{0, 2, 4\}$, e a matriz é semi-definida positiva, pelo que nada podemos concluir. Fazemos uma análise *ad hoc*. Olhando para a função, é

$$f(x,y,z) = (x+y^2)^2 + z^2 \geq 0.$$

Como $f(a) = 0$ concluímos que a é um minimizante global.

Teoremas da Função Inversa e Implícita

E.1 **Enunciado** Seja

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > -1\right\}$$

e $f : A \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = ((u(x,y), v(x,y)) = \left(x - y + \log(1+xy), x + y - x^2y^2\right).$$

Mostre que f é invertível numa vizinhança de $a = (0,0)$. Calcule

$$\partial xv(0,0),$$

onde $f^{-1}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$.

Resolução

O conjunto A é aberto porque é a imagem inversa do conjunto aberto $(-1, +\infty)$ pela função contínua xy. A função

f é claramente de classe C^1 em A. O diferencial de f em A é

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{y}{1+xy} & -1 + \frac{x}{1+xy} \\ 1 - 2xy^2 & 1 - 2yx^2 \end{bmatrix}$$

Avaliamos em $(0,0) \in A$ e fica

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é $2 \neq 0$. Podemos assim aplicar o teorema da função inversa e concluir que a função é invertível numa vizinhança da origem. Para calcular a derivada aplicamos a fórmula da derivada da função inversa, notando que $f(0) = 0$,

$$Df^{-1}(0,0) = Df^{-1}(0, f(0)) = Df(0,0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Recorde-se que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Notando que $f^{-1}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, é

$$\frac{\partial x}{\partial v}(0,0) = \frac{1}{2}.$$

E.2 **Enunciado**

Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (z+1)^3 = -1 \\ e^x + e^y + e^z = 3 \end{cases}.$$

Mostre que existe um intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ e uma função $f \in C^1(I)$ tal que, numa vizinhança de $(0,0,0)$, as soluções do sistema são dadas pelo gráfico de f em I. Calcule a aproximação de Taylor de primeira ordem de f.

Resolução

Utilizamos o teorema da função implícita. Consideramos a função $F : D \to \mathbb{R}^2$, com $D = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ aberto, definida por

$$F(x,y,z) = (x^2 + y^2 - (z+1)^3 + 1, e^x + e^y + e^z - 3).$$

Esta função é de classe C^1 e $F(0,0,0) = 0$. Vamos tentar escrever $v = (y,z)$ em função de $u = x$. Temos de verificar apenas a condição da matriz Jacobiana:

$$\frac{\partial F}{\partial v}(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2y & -3(z+1)^2 \\ e^y & e^z \end{bmatrix}(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O determinante é $3 \neq 0$. Podemos assumir sem perda de generalidade que o aberto de $\mathbb{R}$ que o teorema da função implícita nos dá é um intervalo aberto. Existe assim $I \subseteq \mathbb{R}$ aberto com $0 \in I$ e $f \in C^1(I)$ tal que as soluções do sistema ($F = 0$) numa vizinhança de $(0,0,0)$ são o gráfico de f em I. Para a aproximação de Taylor utilizamos a fórmula da derivada da função implícita. Já sabemos que $f(0) = (0,0)$. Precisamos de calcular a matriz Jacobiana:

$$\begin{aligned} Df(0) &= -\left[\frac{\partial F}{\partial v}(0,0,0)\right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial u}(0,0,0) \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo é

$$f(x) = (0, -x) + \|x\|\varepsilon(x)$$

onde $\varepsilon(x) \to 0$ quando $x \to 0$.

Aula 14 Análise Complexa

14.1 Súmula dos Resultados Teóricos

Resumo 14.1

- *Os números complexos* $\mathbb{C}$ *são da forma*
$$\{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$
onde $i^2 = -1$.
- *O módulo (complexo) é dado por*
$$|x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$
- *O conjugado é definido por*
$$\overline{x + iy} = x - iy$$
e tem as propriedades
  * $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
  * $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
  * $|z|^2 = z\overline{z}$
- *Todo o complexo* $z \neq 0$ *tem inverso multiplicativo*
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$
- *Representação polar*
$$z = |z|e^{i\theta} = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right).$$
- *A equação* $z^n = z_0 \neq 0$ *tem* n *soluções, que podem facilmente ser encontradas utilizando a representação polar.*
- *A topologia de* $\mathbb{C}$ *é uma cópia da de* $\mathbb{R}^2$.
- *Funções trigonométricas*
$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$
$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$
- *Funções hiperbólicas*
$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) = \cos(iz)$$
$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) = -i\sin(iz)$$
Estas funções são de classe C^∞ *e temos*
$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = -1.$$
Temos ainda
$$\sinh' z = \cosh z$$
e
$$\cosh' z = \sinh z.$$
- *"Fórmula mais bela da Matemática"*
$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

- *Dada uma função complexa podemos definir a sua parte real e imaginária*
$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$
onde
$$u(x,y) = \Re f(x+iy)\,,\; v(x,y) = \Im f(x+iy).$$
- *Uma função complexa f diz-se diferenciável em z se existir o limite complexo*
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} =: f'(z).$$
- *Uma função diferenciável num aberto Ω de $\mathbb{C}$ diz-se holomorfa em Ω.*
- *Uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ diz-se inteira.*
- *As fórmulas para a derivada do produto, soma, potência e quociente mantém-se. As derivadas da exponencial e funções trigonométricas também.*
- *Equações de Cauchy Riemann: se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é diferenciável em z_0 então as derivadas parciais face à parte real (x) e complexa (y) do argumento existem e*
$$\partial fx(z_0) + i\partial fy(z_0) = 0.$$
Escrevendo $f(z) = f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ é
$$\partial ux = \partial vy,$$
$$\partial uy = -\partial vx.$$
- *Uma função $f = u + iv$ é diferenciável em z_0 se e só se são verificadas as equações de Cauchy-Riemann e u, v são diferenciáveis no sentido de $\mathbb{R}^2$. A sua derivada é dada por*
$$f'(z_0) = \partial fx(z_0) = -i\partial fy(z_0).$$
- *O Laplaciano de uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é definido como*
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$
- *Se $\Delta u = 0$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, dizemos que u é harmónica em Ω.*
- *As partes reais e imaginárias de uma função holomorfa são uma funções harmónicas.*
- *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto simplesmente conexo (i.e. não tem buracos) e u harmónica em Ω. Então existe $v : \Omega \to \mathbb{R}$ harmónica tal que $f = u + iv$ é holomorfa. Chamamos a esta função v a função harmónica conjugada de u.*

♠

14.2 Exercícios Propostos

✍ **Exercício 14.1** Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações

a. $z^3 + iz^2 - iz + 1 = 0$; **b.** $z^7 + z^4 - 16z^3 - 16 = 0$.

✍ **Exercício 14.2** Mostre que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$.

Apresente uma condição necessária e suficiente sobre z para que se tenha a igualdade.

✍ **Exercício 14.3** Represente graficamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$ e diga se são abertos, fechados e limitados.

a. $\{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} = 16\}$; **b.** $\{z \in \mathbb{C} : z + \overline{z} = 4\}$; **c.** $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| > |z-1+i|\}$

d. $\{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| + |Im(z)| \leq 1\}$; **e.** $\left\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2 \wedge |Argz| < \frac{\pi}{4}\right\}$; **f.** $\left\{z \in \mathbb{C} : Re(z^2) > 0\right\}$.

✍ **Exercício 14.4** Determine a parte real e a parte imaginária das funções definidas por:

$$\textbf{a. } f(z)=\frac{z+2}{z-1}; \qquad \textbf{b. } f(z)=3i\overline{z}+4(i+z).$$

✍ **Exercício 14.5** Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações:

$$\textbf{a. } e^z=1+i \qquad \textbf{b. } e^z=-1 \qquad \textbf{c. } \cos z=2 \qquad \textbf{d. } e^z=e^{iz}.$$

✍ **Exercício 14.6** Considerando $z=x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, calcule os seguintes limites:

$$\textbf{a. } \lim_{z\to -1+2i}\left(3xy+i\,(x-y)^2\right) \qquad \textbf{b. } \lim_{z\to 1+i}\frac{z^2-5}{iz} \qquad \textbf{c. } \lim_{z\to i}\frac{z(z^2+1)}{z-i} \qquad \textbf{d. } \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{sen(z^2)}$$

✍ **Exercício 14.7** Mostre que f é contínua no ponto $z_0\in\mathbb{C}$ se e só se $\overline{f}$ é contínua nesse ponto.

✍ **Exercício 14.8** Verifique se as seguintes funções podem ser prolongadas por continuidade à origem:

$$\textbf{a. } f(z)=\frac{Re(z)}{z} \qquad \textbf{b. } g(z)=\frac{z}{|z|}$$

✍ **Exercício 14.9** Considere a função definida em $\mathbb{C}$ por

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^5}{|z|^4} & se\ \ z\neq 0\\ 0\ \ se & z=0\end{cases}.$$

Prove que:

a. Não existe $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}$.

b. Sendo $u=Re(f)$ e $v=Im(f)$, mostre que para todo o $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $u(x,0)=x$ e $v(0,y)=y$.

✍ **Exercício 14.10** Seja, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f\,(x+iy)=\left(x^2+2y\right)+i\left(x^2+y^2\right)$. Determine em que pontos $z_0=x_0+iy_0$ existe $f'(z_0)$.

✍ **Exercício 14.11** Considere uma função inteira $f\,(x+iy)=x^2-xy-y^2+iv\,(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Determine $f(z)$ e $f'(z)$.

✍ **Exercício 14.12** Mostre que a parte real de uma função inteira não pode ser dada por

$$u\,(x,y)=x^2+y^2, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

✍ **Exercício 14.13** Obtenha as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

✍ **Exercício 14.14** Determine o maior subconjunto de $\mathbb{C}$ onde as seguintes funções são diferenciáveis:

$$\textbf{a. } f(x+iy)=-\left(e^y-e^{-y}\right)\cos(x)+i\left(e^y+e^{-y}\right)\sin(x) \qquad \textbf{b. } f(z)=\frac{\overline{z}}{|z^2|}$$

✍ **Exercício 14.15** Determine $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de modo a que a função f definida em $\mathbb{C}$ por

$$f\,(x+iy)=u(x,y)+i(x^3+y^3-3x^2y-3xy^2), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

seja uma função inteira e $f(0)=0$.

✍ **Exercício 14.16** Sejam $u_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (com $k \in \mathbb{N}_0$) as funções definidas por $u(x,y) = x^k - y^k$. Calcule os valores de k para os quais existem funções f_k holomorfas tais que $Re(f_k) = u_k$ e determine-as.

✍ **Exercício 14.17** Determine as funções harmónicas conjugadas da função w definida em $\mathbb{R}^2$ por $w(x,y) = x^2 - 3x - y^2$.

✍ **Exercício 14.18** Considere a função u definida em $\mathbb{R}^2$ por $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$.

a. Mostre que u é uma função harmónica.

b. Determine a função holomorfa f tal que $Re(f) = u$ e $f(0) = 2i$.

✍ **Exercício 14.19**

a. Prove que a função u definida em $\mathbb{R}^2$ por $u(x,y) = e^{-x}\,(x\sin(y) - y\cos(y))$ é harmónica.

b. Determine v tal que $f = u + iv$ seja inteira.

c. Obtenha uma expressão para $f(z)$ e calcule $f'(2+i)$.

✍ **Exercício 14.20** Seja f uma função complexa de variável complexa, holomorfa no aberto Ω, e seja $\overline{\Omega} = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$. Seja $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ a função definida por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Prove que g é holomorfa.

14.3 Resolução dos Exercícios tratados na aula

14.10 Temos $f = u + iv$, com

$$u(x,y) = x^2 + 2y \in C^\infty$$

$$v(x,y) = x^2 + y^2 \in C^\infty.$$

Como u, v são diferenciáveis, basta verificarmos as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \partial ux = 2x = \partial vy = 2y \\ \partial uy = 2 = -\partial vx = -2x \end{cases}$$

Vem então $x = y = -1$, pelo que a função apenas é diferenciável em $z_0 = -1 - i$.

14.11 Utilizamos as equações de Cauchy-Riemann para encontrar v. Como

$$\partial ux = 2x - y,$$

$$\partial uy = -2y - x.$$

vem

$$\begin{cases} v(x,y) = \int \partial ux\, dy + C_x = -\frac{y^2}{2} + 2xy + C_x \\ v(x,y) = -\int \partial uy\, dx + C_y = \frac{x^2}{2} + 2xy + C_y \end{cases}$$

Temos então, para algum $K \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= x^2 - y^2 - xy + i\frac{x^2 - y^2}{2} + 2ixy + iK \\ &= x^2 - y^2 + 2ixy + \frac{i}{2}\left(x^2 - y^2 - \frac{1}{i}2xy\right) + iK \\ &= z^2 + \frac{i}{2}(x^2 - y^2 + 2ixy) + iK \\ &= z^2\left(1 + \frac{i}{2}\right) + iK. \end{aligned}$$

A derivada é então fácil de calcular

$$f'(z) = z(2+i).$$

14.12 Se a função fosse inteira, o Laplaciano da parte real seria nulo. No entanto

$$\Delta u = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

14.14 (a). Podemos escrever

$$u(x, y) = -2 \sinh y \cos x \in C^{+\infty}$$

e

$$v(x, y) = 2 \cosh y \cos x \in C^{+\infty}.$$

As derivadas são então

$$\partial ux = 2 \sinh y \sin x = \partial vy$$

e

$$\partial uy = -2 \cosh y \cos x = -\partial vx,$$

pelo que as equações de Cauchy-Riemann se verificam em todo o $\mathbb{R}^2$. Como u, v são diferenciáveis, vem que f é inteira.

(b). Note-se que

$$|z^2| = \sqrt{\overline{z^2} z^2} = \sqrt{(\bar{z}z)^2} = \sqrt{|z|^4} = |z|^2 = \bar{z}z.$$

Assim,

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z^2|} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

desde que $z \neq 0$. Esta função é holomorfa no seu domínio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

14.15 Temos

$$\partial vx = 3x^2 - 6xy - 3y^2$$

e

$$\partial vy = 3y^2 - 3x^2 - 6xy.$$

Utilizamos as equações de Cauchy-Riemann para encontrar u:

$$\begin{cases} u(x, y) = \int \partial vy \, dx + C_y = 3xy^2 - x^3 - 3yx^2 + C_y \\ u(x, y) = -\int \partial vx \, dy + C_x = -3x^2 y + 3xy^2 + y^3 + C_x \end{cases}$$

Vem então

$$u(x, y) = y^3 - x^3 + 3xy^2 - 3x^2 y + K, K \in \mathbb{R}.$$

Como $f(0) = 0$ vem $u(0, 0) = 0$ e portanto $K = 0$.

14.16 O conjunto $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo. Vamos ver quando u é harmónica neste conjunto. Temos

$$\Delta u_k = \begin{cases} k(k-1)\left(x^{k-2} - y^{k-2}\right) & , k > 2 \\ 0 & , k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}.$$

Logo existe uma função harmónica conjugada v para $k \in \{0, 1, 2\}$.

Utilizamos agora as equações de Cauchy-Riemann para encontrar v.

Quando $k = 0$ é simplesmente $u_0 \equiv 0$ e portanto $v = K$ para algum $K \in \mathbb{R}$. Fica então

$$f_0(z) = iK.$$

Quando $k = 1$, temos $u_1 = x - y$ e portanto

$$\partial u_1 x = 1$$

e

$$\partial u_1 y = -1.$$

Vem então para algum $K \in \mathbb{R}$

$$v(x, y) = y + x + K$$

e portanto
$$f_1(z) = f_1(x+iy) = x - y + i(x+y) + iK = z + iz + iK.$$
Para $k = 2$ temos $u_2 = x^2 - y^2$ e portanto
$$\partial u_2 x = 2x$$
e
$$\partial u_2 y = -2y.$$
Vem então para algum $K \in \mathbb{R}$
$$v(x,y) = 2xy + K$$
e portanto
$$f_2(z) = f_2(x+iy) = x^2 - y^2 + i2xy + iK = z^2 + iK.$$

18. (a). Temos
$$\Delta u = -6y + (6y + 0) = 0.$$

14.18 Temos
$$\partial u x = -6xy$$
e
$$\partial u y = 3y^2 - 3x^2.$$
Utilizamos as equações de Cauchy-Riemann para encontrar v:
$$\begin{cases} v(x,y) = \int \partial u x \, dy + C_x = -3xy^2 + C_x \\ v(x,y) = -\int \partial u y \, dx + C_y = -3xy^2 + x^3 + C_y \end{cases}$$
Vem então
$$u(x,y) = yx^3 - 3xy^2 + K, K \in \mathbb{R}.$$
Como $f(0) = 2i$ vem $v(0,0) = 2$ e portanto $K = 2$. Concluímos então que
$$f(x+iy) = y^3 - 3x^2 y + i\left(yx^3 - 3xy^2 + 2\right).$$

14.19 (a). Temos
$$\partial u x = e^{-x}\left(-x \sin y + y \cos y + \sin y\right)$$
e
$$\partial u y = e^{-x}\left(x \cos y - \cos y + y \sin y\right).$$
As segundas derivadas são
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}\left(x \sin y - y \cos y - \sin y - \sin y\right)$$
e
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x}\left(-x \sin y + \sin y + \sin y + y \cos y\right).$$
Somando, de facto obtemos $\Delta u = 0$.

(b). Utilizamos as equações de Cauchy-Riemann para encontrar v. Temos
$$\begin{aligned} v(x,y) &= -\int \partial u y \, dx + C_y \\ &= \cos y \int x(-e^{-x}) \, dx - e^{-x}\cos y + e^{-x} y \sin y + C_y \\ &= \cos y e^{-x}(x+1) - e^{-x}\cos y + e^{-x} y \sin y + C_y. \end{aligned}$$
É também
$$v(x,y) = \int \partial u x \, dy + C_x = e^{-x}\left(x \cos y + y \sin y\right) + C_x.$$

Vem então, para algum $K \in \mathbb{R}$,

$$v(x,y) = e^{-x}\left(x\cos y + y\sin y\right) + K.$$

(c). Temos, com $z = x + iy$,

$$\begin{aligned}
f(z) - iK &= e^{-x}\left(x\sin y - y\cos y + ix\cos y + iy\sin y\right)\\
&= e^{-x}\left(x(i\cos y + \sin y) + y(-\cos y + i\sin y)\right)\\
&= e^{-x}\left(x(i\cos y + \sin y) + iy(i\cos y + \sin y)\right)\\
&= ze^{-x}(i\cos y + \sin y)\\
&= ize^{-x}(\cos y - i\sin y)\\
&= ize^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y))\\
&= ize^{-x}e^{-iy}\\
&= ize^{-z}.
\end{aligned}$$

A derivada é assim

$$f'(z) = i(e^{-z} - ze^{-z}) = ie^{-z}(1-z).$$

Facilmente calculamos então

$$f'(2+i) = e^{-2-i}i(-1-i) = e^{-2-i}(1-i).$$