Análise Matemática

com Aplicações à Economia

Filipe Oliveira - Filipa Carvalho

O *TEMPLATE* DESTA OBRA ESTÁ REGISTADO DE ACORDO COM O SEGUINTE *COPYRIGHT*:

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

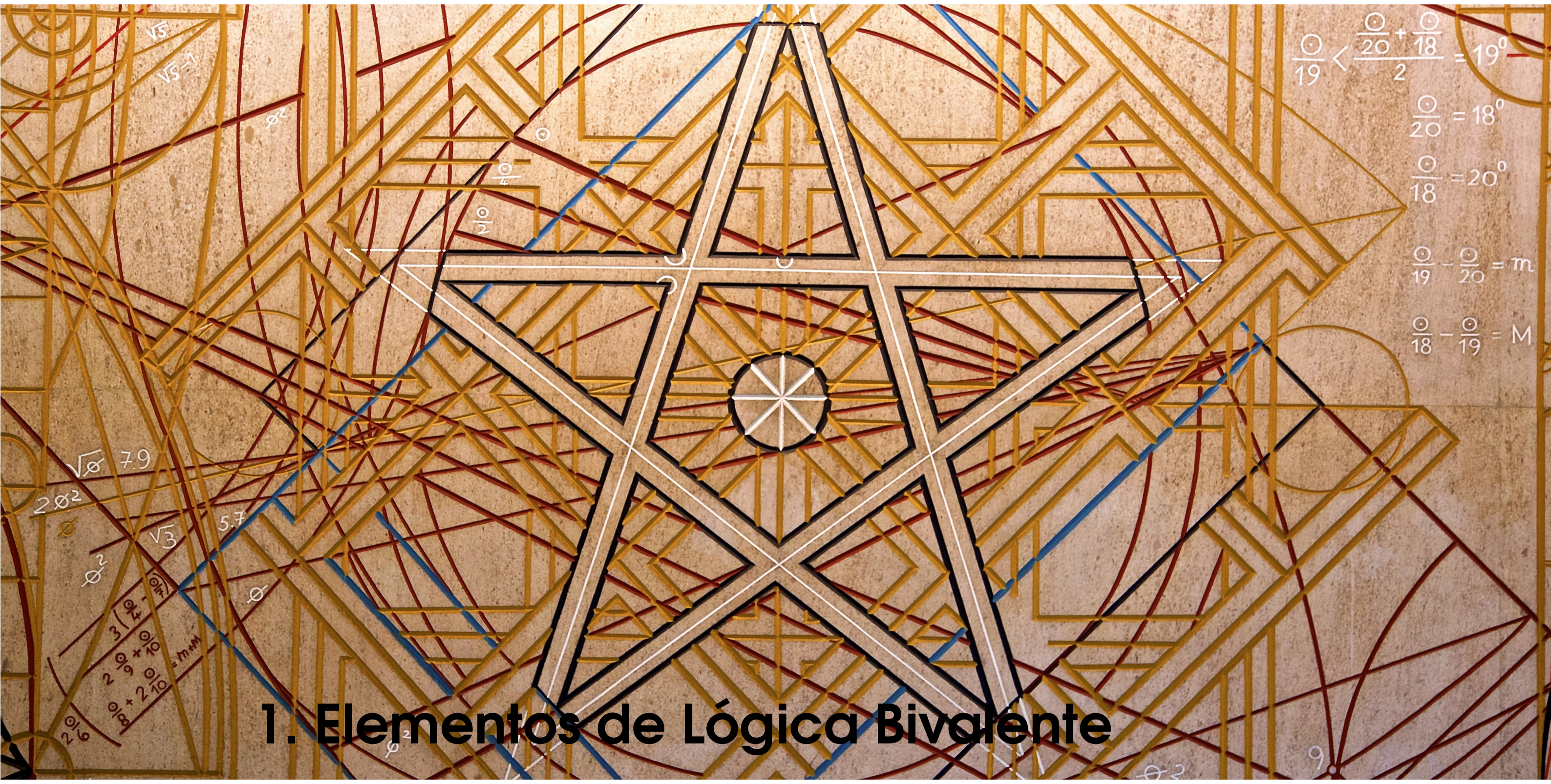
First printing, March 2013

Conteúdo

I Generalidades

I Generalidades

part.1



1. Elementos de Lógica Bivalente

1.1 Designações e Proposições

1.1.1 Designações

Quando nos pretendemos referir a um determinado objeto podemos utilizar expressões variadas. Apelidaremos de agora em diante essas expressões por «designações». Por exemplo, "a capital de Portugal" é uma designação de Lisboa, uma vez que designa essa cidade. Da mesma forma, "o português mais rápido de sempre" é uma designação do atleta Francis Obikwelu e "o vocalista dos Dire Straits" uma designação de Mark Knopfler.

Existem muitas formas diferentes de nos referirmos a um mesmo objeto. Quando dizemos "Neil Armonstrong", ou "o primeiro homem a caminhar sobre a Lua", ou "o comandante da missão Apollo 11", estamos na realidade a referir-nos à mesma pessoa. Estas diferentes designações são ditas «designações equivalentes» e utilizaremos o sinal «$=$» (igual) para as relacionar. Assim, podemos escrever

$$\text{Neil Armonstrong} = \text{o comandante da missão Apollo 11},$$

ou, por exemplo,

$$\sqrt{16} = 5 - 1,$$

uma vez que "$\sqrt{16}$" e "$5-1$"são designações de um mesmo objeto, o número natural 4.
Por construção, é imediato verificar que a relação de igualdade goza de três propriedades triviais: dadas três designações A, B e C, tem-se

1. $A = A$ (reflexividade);
2. Se $A = B$ então $B = A$ (simetria);
3. Se $A = B$ e $B = C$ então $A = C$ (transitividade).

Veremos neste livro muitas outras relações que verificam estas três propriedades. Essas relações são ditas ≪relações de equivalência≫.

Se duas designações se referirem a objetos distintos, utilizaremos o sinal "$\neq$"(diferente) para as relacionar. Por exemplo

$$\text{o primeiro homem a caminhar sobre a Lua } \neq \text{ Mark Knofler}$$

ou

$$7-1 \neq \sqrt{16}.$$

1.1.2 Proposições

Entende-se por ≪proposição≫ uma expressão suscetível de ser verdadeira (V) ou falsa (F). Estes dois atributos, ≪verdadeiro≫ e ≪falso≫, designam-se por ≪valores lógicos≫ da proposição. Por exemplo, "Todos os números reais são positivos"é uma proposição falsa e "Todos os números inteiros são números racionais"é uma proposição verdadeira.
No âmbito da Lógica Bivalente, vale o seguinte princípio:

Princípio de não contradição
Uma proposição não pode ser simultanemente verdadeira e falsa.

A partir de duas proposições p e q é possível definir muitas outras proposições, ou seja, é possível "operar"p e q para se obterem outras proposições.
A proposição $p \Leftrightarrow q$ (≪equivalência≫ entre p e q), é definida como sendo verdadeira se e só se p e q tiverem o mesmo valor lógico. É usual apresentar este tipo de definição na forma de uma ≪tabela de verdade≫, que exprime o valor lógico da proposição operada em função do valor lógico das proposições operandas. No caso da equivalência,

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

De acordo com esta tabela, a proposição $5-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{16}=4$ é falsa, e a proposição $5-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{16}=3$ é verdadeira.

A proposição $p \Leftrightarrow q$ pode ler-se de diferentes formas, das quais destacamos ≪p é equivalente a q≫, ≪p se e só se (sse) q≫ e ≪p é condição necessária e suficiente para q≫.

Vamos de seguida definir um certo número de operações entre proposições, começando pela ≪conjunção≫ :

Definição 1.1.1: Conjunção

Dadas proposições p e q, define-se a proposição «$p \wedge q$» (p e q), que é verdadeira se e só se as proposições p e q são verdadeiras.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A operação de conjunção verifica as seguintes propriedades, nas quais se representou por «V» (respetivamente por «F») uma qualquer proposição verdadeira (respetivamente falsa).

Proposição 1.1.1 Dadas proposições p, q e r,

1. $p \wedge V \Leftrightarrow p$ (V é dito «elemento neutro da conjunção»);
2. $p \wedge F \Leftrightarrow F$ (F é dito «elemento absorvente da conjunção»);
3. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (associatividade);
4. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (comutatividade).

Demonstração. Para provarmos qualquer uma destas propriedades, e atendendo à definição da equivalência, devemos mostrar que as proposições que figuram à esquerda e à direita do sinal de equivalência têm o mesmo valor lógico, independentemente do valor lógico das proposições p, q e r tomadas individualmente.
Assim, no que diz respeito à primeira propriedade:

- Se p for verdadeira,
$$p \wedge V \Leftrightarrow V \wedge V \Leftrightarrow V, \quad \text{e} \quad V \wedge p \Leftrightarrow V \wedge V \Leftrightarrow V.$$
- Se p for falsa,
$$p \wedge V \Leftrightarrow F \wedge V \Leftrightarrow F, \quad \text{e} \quad V \wedge p \Leftrightarrow V \wedge F \Leftrightarrow F.$$

Assim, $p \wedge V$ e $V \wedge p$ têm o mesmo valor lógico, independentemente do valor lógico de p. Por definição, $p \wedge V \Leftrightarrow p$. De forma análoga se pode demonstrar a propriedade 2.
Para provarmos a propriedade 3, devemos comparar o valor lógico das proposições $(p \wedge q) \wedge r$ e $p \wedge (q \wedge r)$. Existem diversas formas de o fazer. Um método cómodo consiste em construir a tabela de verdade de cada uma delas.
Começamos por colocar todas as combinações possíveis dos valores lógicos das proposições p, q e r:

p	q	r
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

De seguida, contruímos os valor lógicos de $(p \wedge q)$, e, finalmente, de $(p \wedge q) \wedge r$:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F
V	V	F	V	F
V	F	F	F	F
F	V	F	F	F
F	F	F	F	F

Construindo agora a tabela de verdade da proposição $p \wedge (q \wedge r)$,

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F
V	V	F	F	F
V	F	F	F	F
F	V	F	F	F
F	F	F	F	F

verificamos qua as duas tabelas são idênticas, pelo que as proposições são equivalentes.

Poderíamos naturalmente ter procedido de outra forma, reparando por exemplo que, de acordo com a definição da conjunção:

- $(p \wedge q) \wedge r$ é verdadeira se e só se $(p \wedge q)$ e r são verdadeiras, ou seja, se e só se p, q e r são verdadeiras.
- Da mesma forma, $p \wedge (q \wedge r)$ é verdadeira se e só se p e $(q \wedge r)$ são verdadeiras, ou seja, se e só se p, q e r são verdadeiras.

Finalmente, a propriedade 4 é trivial.

■

Observemos agora a operação de disjunção:

Definição 1.1.2: Disjunção

Dadas proposições p e q, define-se a proposição «$p \vee q$» (p ou q), que é verdadeira se e só se pelo menos uma das proposições p ou q é verdadeira.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A disjunção goza de propriedades análogas à da conjunção, sendo as respetivas demonstrações em tudo semelhantes:

Proposição 1.1.2 Dadas proposições p, q e r,

1. $p \vee V \Leftrightarrow V$ (V é elemento absorvente da disjunção);
2. $p \vee F \Leftrightarrow p$ (F é elemento neutro da disjunção);
3. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ (associatividade);
4. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (comutatividade).

A conjunção e a disjunção verificam uma propriedade de distributividade particularmente interessante, uma vez que a primeira é distributiva relativamente à segunda e vice-versa. A prova destas propriedades são deixadas em exercício:

Proposição 1.1.3 Dadas proposições p, q e r,

1. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
2. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Apresentamos de seguida o operador de negação, que, contrariamente aos operadores introduzidos previamente, tem como argumento uma única proposição.

Definição 1.1.3: Negação

Dadas uma proposição p, define-se a proposição «$\sim p$» (não p), que é verdadeira se e só se p for falsa.

p	$\sim p$
V	F
F	V

De maneira imediata, dada uma proposição p, $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$. Temos também o seguinte resultado:

Teorema 1.1.4: Primeiras Leis de De Morgan

Dadas proposições p e q

1. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$;
2. $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$.

Demonstração. Mutatis mutandis, provaremos por exemplo a propriedade 1, apresentando as tabelas de verdade das duas proposições cuja equivalência se pretende mostrar. Como se pode verificar abaixo, são idênticas:

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

■

A proposição seguinte, de prova imediata, é conhecida por «princípio do terceiro excluído»:

Proposição 1.1.5 - Princípio do terceiro excluído
Dada uma proposição p,

$$p \vee (\sim p) \Leftrightarrow V.$$

Esta propriedade traduz o seguinte facto: entre uma proposição e a sua negação, uma das duas é verdadeira, não existindo uma terceira alternativa.

Terminamos esta secção com a introdução do importante operador de implicação}:

Definição 1.1.4: Implicação

Dadas proposições p e q, define-se a proposição «$p \Rightarrow q$» (também denotada «$q \Leftarrow p$») por

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Antes de mais, apresentamos algum vocabulário associado a este operador: $p \Rightarrow q$ lê-se "p implica q", "se p, então q"ou "p, logo q". A proposição p diz-se «antecedente» da implicação e q «consequente da implicação». É também usual denominar q por «condição necessária» (para p) e p por «condição suficiente» (para q).

Para ilustrar este vocabulário, tomemos a implicação

$$\text{Chove} \ \Rightarrow \ \text{Há nuvens no céu} \ .$$

Trata-se de uma proposição verdadeira. Podemos dizer:

- "O facto de estar a chover implica que há nuvens no céu".
- "Se chove, então há núvens no céu".
- "Chove, portanto há nuvens no céu".
- "Chover é uma condição suficiente para que haja nuvens no céu".
- "Haver nuvens no céu é uma condição necessária para que chova".

Todas estas frases são representações possíveis da implicação inicial acima referida.

A tabela de verdade da implicação assenta nos seguintes princípios:

- De uma proposição verdadeira, apenas se pode deduzir uma outra proposição verdadeira. É a base do raciocínio logico-dedutivo.
- Tomando como premissa uma proposição falsa, a conclusão pode ser verdadeira ou falsa. Por exemplo "Todos os números ímpares são números primos"é uma proposição falsa. Contudo, implica que 5 é um número primo, o que é uma proposição verdadeira. E implica também que 9 é um número primo, o que é falso.

Ponto de Notação
Para declarar que uma dada proposição p é verdadeira, deveríamos escrever

$$p \Leftrightarrow V.$$

Ora esta notação torna-se algo pesada. Assim, é usual, em muitos contextos e na ausência de ambiguidades, escrever simplesmente

$$p$$

ficando subentendido que p é uma proposição verdadeira. Assim, é suficiente escrever "$5+3=8$", ficando implícito que se trata de uma proposição verdadeira, sem necessidade de referir que "$(5+3=8) \Leftrightarrow V$".

De agora em diante, e quando oportuno, utilizaremos esta notação simplificada: proposições como "$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow V$", "$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$"ou "$(p \wedge q) \Leftrightarrow V$"serão substituidas simplesmente por $p \Leftrightarrow q$, $p \Rightarrow q$ ou $p \wedge q$.

Neste livro, e neste espírito, utilizaremos muito frequentemente o título ≪Proposição≫ nos enunciados de resultados verdadeiros, isto é, de proposições verdadeiras.

Voltemos ao operador de implicação:

Proposição 1.1.6 Dadas proposições p, q e r,

1. $p \Rightarrow p$ (a implicação é reflexiva);
2. $\Big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\Big) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ (a implicação é anti-simétrica);
3. $\Big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\Big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (a implicação é transitiva).

Uma relação binária (isto é, entre dois objetos, neste caso entre duas proposições) diz-se uma ≪relação de ordem≫ quando verifica estas três propriedades. Assim, a relação de implicação é uma relação de ordem nas proposições.

Demonstração. Deixamos em exercício os pontos 1. e 3., provando apenas o ponto 2., dito ≪princípio de dupla implicação≫. Trata-se de uma propriedade muito útil para demonstrar uma equivalência, bastando para isso provar duas implicações. No decurso deste livro utilizaremos muitas vezes esta metodologia.
A proposição $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ é falsa se e só se uma das proposições $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ for falsa. Ou seja, no primeiro caso, se p for falsa e q for verdadeira, ou, no segundo caso, se q for falsa e se p for verdadeira. Assim, $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ é falsa se e só se as proposições p e q tiverem valores lógicos diferentes, o que equivale à condição necessária e suficiente para que $p \Leftrightarrow q$ seja falsa. ■

Notamos agora que a implicação pode ser expressa como combinação dos operadores $\sim$ e $\vee$:

Proposição 1.1.7 Dadas proposições p e q,

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee q].$$

Demonstração. A prova é imediata: $(\sim p) \vee q$ é falsa se e só se p for verdadeira (ou seja, $\sim p$ falsa) e q for falsa, o que corresponde à definição da implicação $p \Rightarrow q$. ■

Contrariamente à equivalência, a implicação não goza de simetria, isto é, $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ podem ter valores lógicos distintos, sendo uma falsa e outra verdadeira. É o caso, obviamente, se p for verdadeira e q for falsa. Contudo, existe uma implicação que tem sempre o mesmo valor lógico do que a implicação $p \Rightarrow q$. É a implicação dita «contra-recíproca»:

Proposição 1.1.8 - Implicação contra-recíproca
Dadas duas proposições p e q,

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p).$$

A implicação $\sim q \Rightarrow \sim p$ diz-se a contra-recíproca de $p \Rightarrow q$.

A prova é imediata e é deixada em exercício. A equivalência entre estas duas implicações é muito prática, uma vez que pode ser mais simples demonstrar $\sim q \Rightarrow \sim p$ em vez de $p \Rightarrow q$:
Para ilustrar este princípio, e sendo n um número natural superior ou igual a 3, imaginemos que pretendemos demonstrar a seguinte proposição:

Se n é um número primo, então n é um número ímpar.

A contra-recíproca desta implicação é

Se n é um número par, então n não é primo.

Esta segunda afirmação é bem mais simples de provar: se n é par, por definição n é divisivel por 2. Como n é superior ou igual a 3, $n \neq 2$. Assim, 2 é um divisor próprio de n (isto é, distinto da unidade e de ele próprio), pelo que, por definição, n não é primo.

1.1.3 Exercícios

Exercício 1.1.1 Mostre que o operador $\Leftrightarrow$, que a duas proposições p e q associa a proposição $p \Leftrightarrow q$, estabelece uma relação de equivalência no sentido descrito na secção 1.1.1.

Exercício 1.1.2 Dadas proposições p, q e r, mostre que (cf. Proposição 1.1.3):

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

Exercício 1.1.3 Mostre que a implicação é transitiva (cf. Proposição 1.1.6).

Exercício 1.1.4 Mostre a seguinte propriedade, conhecida por «modus ponens»:

$$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q.$$

Exercício 1.1.5 Mostre a seguinte propriedade, conhecida por «modus tollens»:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p.$$

Exercício 1.1.6 Mostre que uma implicação e a respetiva contra-recíproca têm o mesmo valor lógico (cf. Proposição 1.1.8).

Exercício 1.1.7 Considere o operador $\dot{\vee}$, conhecido por «ou exclusivo», definido da seguinte forma: dadas proposições p e q, $p \dot{\vee} q$ é verdadeira se e só se uma e apenas uma das proposições p e q é verdadeira.
Exprima uma proposição equivalente a $p \dot{\vee} q$ utilizando apenas os símbolos p, q, $\wedge$, $\vee$ e $\sim$.

Exercício 1.1.8 Dadas proposições p, q e r, obtenha uma proposição equivalente à negação de cada uma das seguintes proposições:

1. $p \wedge (\sim q)$;
2. $p \vee [q \wedge (\sim r)]$;
3. $p \Leftrightarrow q$;
4. $p \Rightarrow (\sim q)$.

1.2 Quantificação

1.2.1 Variáveis, expressões designatórias e condições

Uma ≪variável≫ é um símbolo que pode ser substituido por diferentes objetos, assumindo deste modo diferentes valores. À substituição de uma variável por um objeto é usual chamar-se ≪concretização da variável≫. Usualmente, designa-se uma variável por uma única letra (x, y, n...etc). Uma ≪expressão designatória≫, $A(x)$, é uma expressão que se torna numa designação quando a variável x assume um determinado valor.
Alguns exemplos:

1. $A(x) = x^2 - 1$ é uma expressão designatória: ao substituir-se x por um dado valor, digamos por 5, obtém-se a designação "24".
2. $A(x) =$ "o mais velho aluno inscrito na Universidade x "é uma expressão designatória. Ao substituirmos x pelo nome de uma Universidade, passa a referir um aluno em concreto.

Uma ≪expressão proposional≫, ou ≪condição≫, é uma expressão $p(x)$ que se torna numa proposição quando a variável x é concretizada. Por exemplo, a expressão $p(x)$

$$x \geq \sqrt{x} + 1$$

é uma condição, já que, ao se substituir x por um valor se obtém uma proposição. Substituindo x por 4, obtém-se "$4 \geq 3$", que é uma proposição (verdadeira), e substiuindo x por 0, "$0 \geq 1$", que é iguamente uma proposição (falsa).

Introduzimos agora a noção de quantificação de uma proposição:

Definição 1.2.1: Quantificador Universal

Dada uma condição $p(x)$, define-se a proposição ≪Qualquer que seja x, $p(x)$≫ como sendo verdadeira se e só se $p(x)$ for verdadeira independentemente do valor assumido pela variável x. Nesse caso, a condição $p(x)$ diz-se ≪universal≫. Esta proposição denota-se por

$$\forall x,\, p(x)$$

onde o símbolo ≪$\forall$≫ é dito ≪quantificador universal≫.

A par do quantificador universal, definimos também o quantificador existencial:

Definição 1.2.2: Quantificador Existencial

Dada uma condição $p(x)$, define-se a proposição «Existe x tal que $p(x)$» como sendo verdadeira se e só se $p(x)$ for verdadeira para pelo menos um valor da variável x. Nesse caso, a condição $p(x)$ diz-se «possível». Esta proposição denota-se por

$$\exists x : p(x)$$

onde o símbolo «$\exists$» é dito «quantificador existencial».

Os quantificadores existencial e universal estão intimamente ligados pela relação de negação. De facto, dizer que uma condição $p(x)$ não é universal equivale a dizer que existe pelo menos um valor de x que a torna falsa. Este facto leva-nos à seguinte definição:

Definição 1.2.3: Negação de uma condição quantificada universalmente

Dada uma condição $p(x)$, a negação da proposição $\forall x,\, p(x)$ é a proposição $\exists x :\sim p(x)$.

Desta definição decorre uma expressão para a negação de uma proposição quantificada existencialmente:

Proposição 1.2.1 - Negação de uma condição quantificada existencialmente
Dada uma condição $p(x)$, a negação da proposição $\exists x :\; p(x)$ é a proposição $\forall x, \sim p(x)$.

Demonstração. A prova é imediata: de acordo com a Definição acima,

$$\sim [\forall x, \sim p(x)] \Leftrightarrow \exists x :\sim (\sim p) \Leftrightarrow \exists x : p(x)$$

uma vez que a negação é idempotente. Tomando agora a negação e utilizando uma vez mais esta propriedade da negação,

$$\forall x, \sim p(x) \Leftrightarrow \sim [\exists x : p(x)].$$

■

1.2.2 Quantificação Múltipla

Uma proposição pode ser quantificada por mais do que um quantificador. Tomemos por exemplo duas variáveis, x e y, e uma proposição $p(x,y)$ que depende de ambas. Então,

$$q(x) = \text{“}\forall y, p(x,y)\text{”}$$

é uma condição que depende apenas da variável x. É verdadeira para as concretizações de $x = a$ que tornem a condição $p(a,y)$ universal (em y).

Para fixarmos as ideias, tomemos o seguinte exemplo:

$$p(x,y) = \text{O número natural } y \text{ é maior do que o número racional } x.$$

Aqui, a condição $q(x)$ é dada por

$$q(x) = \text{“}\forall y,\, y > x\text{”},$$

ou, em linguagem corrente, "Qualquer número natural y é maior do que x". Trata-se de facto de uma condição que apenas depende de x: se $x=-1$ obtém-se uma proposição verdadeira, se $x=\frac{7}{2}$ obtém-se uma proposição falsa.

Por sua vez, $q(x)$, sendo uma condição em x, pode ser quantificada, fazendo sentido escrever

$$\forall x, q(x) \text{ e também } \exists x : q(x).$$

Substituindo $q(x)$, obtêm-se as proposições

$$\forall x, (\forall y,\, p(x,y)) \text{ e } \exists x : (\forall y,\, p(x,y)).$$

É usual omitirem-se os parênteses, escrevendo-se proposições como

$$\forall x,\, \forall y,\, p(x,y), \qquad \exists x : \forall y,\, p(x,y), \qquad \exists x : \exists y : p(x,y), \qquad \forall x,\, \exists y : p(x,y).$$

Regressando ao nosso exemplo, vejamos quais destas proposições são verdadeiras.

- $\forall x, \forall y, y > x$. Vimos que para $x=\frac{7}{2}$, a proposição $q(x)$ é falsa. Não se trata pois de uma condição universal (em x): a proposição é falsa.
- $\exists x : \forall y, y > x$. Vimos também que para $x=-1$, a proposição $q(x)$ é verdadeira. Trata-se pois de uma condição possível (em x): a proposição é verdadeira.
- $\forall x, \exists y : y > x$. Consideremos agora a condição $t(x) =$ "$\exists y, y > x$". Esta condição é claramente universal: dado um qualquer número racional x, existe um número natural y maior (tome-se por exemplo para $y = \lfloor x \rfloor + 1$, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ representa a parte inteira). A proposição é pois verdadeira.

- $\exists x : \exists y : y > x$. A condição $t(x)$ introduzida no item anterior, sendo universal, é igualmente possível, pelo que a proposição é verdadeira.

Os seguintes resultados, bastante intuitivos,são deixados sem prova formal:

Teorema 1.2.2: Comutação de quantificadores

Seja $p(x,y)$ uma condição nas variáveis x e y. Então:

1. $\forall x, \forall y, p(x,y) \Leftrightarrow \forall y, \forall x, p(x,y)$;
2. $\exists x : \exists y : p(x,y) \Leftrightarrow \exists y : \exists x : p(x,y)$; (quantificadores idênticos comutam).
3. As proposições $[\forall x, \exists y : p(x,y)]$ e $[\exists y : \forall x, p(x,y)]$ não são equivalentes. Tem-se no entanto
$$\exists y : \forall x,\, p(x,y) \Rightarrow \forall x,\, \exists y : p(x,y).$$

Dada a comutatividade de quantificadores idênticos, é usual representar $\forall x, \forall y$ por $\forall x,y$ e $\exists x : \exists y :$ por $\exists x,y :$. No que diz respeito à propriedade 3., a principal diferença entre as duas proposições é a seguinte:

- A proposição $\exists y : \forall x, p(x,y)$ é verdadeira se e só se existir um y (único) que torna a condição $p(x,y)$ verdadeira, independentemente do valor de x.
- Por outro lado, a proposição $\forall x, \exists y : p(x,y)$ é verdadeira se e só se para qualquer x, existir um y (que pode depender de x) que torna a condição $p(x,y)$ verdadeira.

Ilustremos com um exemplo em linguagem corrente. Quando dizemos: "Qualquer que seja a mulher do grupo, existe um marido (que lhe pertence)"($\forall\exists$) estamos apenas a dizer que todas as mulheres do grupo são casadas. Mas se dissermos que "Existe um marido (que pertence) a todas as mulheres do grupo"($\exists\forall$) estamos a dizer que todas as mulheres estão casadas com o mesmo homem!

1.2.3 Exercícios

Exercício 1.2.1 Indique o valor lógico de cada uma das seguintes proposições, com o pressuposto das variáveis variarem em $\mathbb{R}$.

a. $\forall x,\ x^2+1>1$ **b.** $\forall x,\ x>2 \Rightarrow x>1$ **c.** $\forall x,\ \exists y:\ y=x^2$ **d.** $\exists y:\ \forall x,\ y=x^2$

e. $\forall x,y,\ \exists z:\ yz=x$ **f.** $\exists x,y,\ (x-y)^2=x^2-y^2$ **g.** $\forall x,y,\ y=(x-y)^2=x^2-y^2$.

Que valores lógicos são alterados se considerarmos que as variáveis são números inteiros?

Exercício 1.2.2 Indique quais das seguintes condições são universais, considerando que a variável x é um número real.

a. $|2-3x|<4 \Rightarrow x<2$ **b.** $x<5 \Rightarrow |x|<5$ **c.** $|x-4|>1 \Rightarrow x>5$.

Exercício 1.2.3 Escreva a negação das seguintes proposições, com o pressuposto das variáveis variarem em $\mathbb{R}$.

a. $\forall x,\ \exists y:\ y=x^2$ **b.** $\exists x:\ \forall y,\ z-x=x-y$ **c.** $\forall x,\ \exists y:\ x>y \Rightarrow f(x)>f(y)$.

(f representa uma função real de variável real).

1.3 Condições e conjuntos

Até ao momento, evitámos falar em conjuntos, tendo ficado indefinido o universo de valores que uma determinada variável pode tomar numa dada condição. Quanto muito, dissemos timidamente em algumas instâncias que a variável x "representava um número racional", que a variável y "representava um número natural", etc. Com efeito, a noção de conjunto é dificil de definir em Matemática: abordagens demasiado simplistas levam rapidamente a contradições (isto é, a proposições simultaneamente verdadeiras e falsas, o que contradiz o princípio de não-contradição). Esta dificuldade fica bem patente no famoso paradoxo de Russell, descoberto por Bertrand Russel em 1901, e que deita por terra a teoria de conjuntos elaborada por Georg Cantor no século XIX. Eis o paradoxo de Russell: se pudéssemos definir livremente conjuntos a partir de uma condição, nada nos impediria de definir o conjunto H dos conjuntos que não se contêm a eles próprios enquanto elemento:

$$H=\{A:\ A\notin A\}.$$

Por exemplo,

- O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não pertence a H, uma vez que um conjunto de números não é um número ($\mathbb{N}\notin\mathbb{N}$).
- O conjunto de todos os conjuntos, U, pertence a H, uma vez que o conjunto de todos os conjuntos é por sua vez um conjunto: $U\in U$.

Coloca-se agora a questão de saber se o conjunto H pertence a H:

- Se $H\in H$, tem-se por definição de H que $H\notin H$.
- Se $H\notin H$, tem-se, também por definição de H, que $H\in H$.

Assim, se p for a proposição $H \in H$, as proposições $p \Rightarrow (\sim p)$ e $(\sim p) \Rightarrow p$ são ambas verdadeiras, o que, de acordo com a tabela de verdade da implicação, levaria à conclusão que p seria simultaneamente verdadeira e falsa.

Uma construção adequada de uma Teoria dos Conjuntos consistente ultrapassa em muito o âmbito deste livro. Assim, vamos adoptar a chamada «Teoria intuitiva dos conjuntos», que pressupõe que um conjunto pode ser formado a partir da classe de todos os objetos que verificam uma dada condição. Dada uma condição $p(x)$ definimos pois o conjunto

$$U = \{x : p(x)\},$$

formado por todas as concretizações da variável x que tornam a condição $p(x)$ verdadeira.
Também, dado um conjunto D que se supõe já construído, poderá definir-se o conjunto

$$U = \{x : (x \in D) \wedge p(x)\}$$

formado por todos os elementos de D que verificam a condição $p(x)$. Este conjunto é dito frequentemente «conjunto-solução de $p(x)$ em D», utilizando-se também a notação

$$U = \{x \in D : p(x)\}.$$

Postas estas considerações, regressemos às condições quantificadas. Dado um conjunto D e uma proposição $p(x)$, a proposição

$$\forall x, x \in D \Rightarrow p(x)$$

é verdadeira se e só se todos os elementos de D verificarem a condição $p(x)$. Tratando-se se uma notação algo pesada, os matemáticos costumam abreviá-la (de forma incorreta mas universalmente aceite) para

$$\forall x \in D,\, p(x).$$

Se for verdadeira, diz-se que «$p(x)$ é uma condição universal em D».
Por exemplo, a condição $p(x) =$ "$x^2 + 1 > 0$" é universal no conjunto dos números reais:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0.$$

Da mesma forma, a proposição

$$\exists x : (x \in D) \wedge p(x)$$

é verdadeira se e só se existir um elemento de D que torna a condição $p(x)$ verdadeira. É também usual denotar mais simplesmente esta proposição por

$$\exists x \in D : \, p(x).$$

Se for verdadeira,dizemos que «$p(x)$ é possível em D». Assim, podemos escrever

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x - 1 = 0$$

para exprimir que a equação $x^2 + 4x - 1 = 0$ tem soluções reais.

Com estas notações, temos:

Teorema 1.3.1: Segundas leis de De Morgan

Dada uma proposição $p(x)$ e um conjunto D,

1. $\sim [\forall x \in D,\, p(x)] \Leftrightarrow [\exists x \in D :\sim p(x)]$
2. $\sim [\exists x \in D : p(x)] \Leftrightarrow [\forall x \in D, \sim p(x)]$.

Demonstração. Vamos provar a primeira propriedade, ficando a segunda em exercício. Como vimos,

$$[\forall x \in D,\, p(x)] \Leftrightarrow [\forall x, (x \in D) \Rightarrow p(x)].$$

Pela Proposição 1.1.7,

$$[\forall x \in D,\, p(x)] \Leftrightarrow [\forall x, \sim (x \in D) \vee p(x)].$$

Tomando a negação,

$$\sim [\forall x \in D,\, p(x)] \Leftrightarrow [\exists x : \sim [(\sim (x \in D)) \vee p(x)]]$$

Pelas primeiras Leis de De Morgan 1.1.4,

$$\sim [\forall x \in D,\, p(x)] \Leftrightarrow [\exists x :\ (x \in D) \wedge (\sim p(x))]].$$

Esta última expressão é a definição da condição $\exists x \in D : \sim p(x)$. ■

Uma última nota:

Domínio de uma variável, de uma expressão designatória e de uma condição.
Consideremos um conjunto D no qual uma variável x toma valores. Uma dada expressão designatória pode não fazer sentido para qualquer valor de x em D. Nesse caso, é necessário definir um subconjunto D_A de D no qual a expressão seja coerente. Esse subconjunto é dito o ≪domínio da expressão designatória≫. Na ausência dessa informação considera-se que D_A é o maior sub-conjunto de D (no sentido da inclusão, como veremos mais tarde) no qual $A(x)$ faz sentido.
Exemplo: tomemos x uma variável real (isto é, $x \in D = \mathbb{R}$) e a expressão designatória.

$$A(x) = \sqrt{x-1}.$$

É fácil observar que $A(x)$ só faz sentido se $x \geq 1$, uma vez que a função raiz quadrada não está definida nos reais negativos. Assim, na ausência de outra informação, o domínio de $A(x)$ é o conjunto $D_A = [1; +\infty[\subset \mathbb{R}$. Contudo, nada impede de definir o intervalo $[2;3]$, por exemplo, como sendo o domínio de $A(x)$.

O mesmo vale para condições: salvo indicação em contrário, o ≪domínio da condição $p(x)$≫ é o maior subconjunto de D em que $p(x)$ faz sentido. Tomando por exemplo para $p(x)$

$$\frac{1}{x} \geq x,$$

tem-se $D_p = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.3.1 Exercícios

Exercício 1.3.1 Indique o valor lógico das seguintes proposições:

a. $\forall x > 0, \exists y > 0, |x - 2y| = 3;$ b. $\exists x \in \mathbb{R}, |x+2| = |x+4|.$

Nota: "$\forall x > 0$"significa "$\forall x \in]0; +\infty[$". Esta escrita, apesar de formalmente incorreta, é muito popular entre matemáticos e será usada abundantemente neste livro.

Exercício 1.3.2 Complete com os símbolos $\Leftarrow$ ou $\Rightarrow$ por forma a obter proposições verdadeiras. Caso ambos os símbolos cumpram esse propósito, complete com $\Leftrightarrow$.

$$\textbf{a}.\,\forall x\in\mathbb{R}, x=\sqrt{4}\ldots x=2 \qquad \textbf{b}.\,\forall x\in\mathbb{Q}, x^2>0\ldots x>0 \qquad \textbf{c}.\,\forall x\in\mathbb{R}, x^2<9\ldots x<3$$

$$\textbf{d}.\,\forall x\in\mathbb{R}_0^+, x(x+1)^2=0\ldots x=0 \qquad \textbf{e}.\,\forall x\in\mathbb{R}, x(x+3)<0\ldots x>-3.$$

Exercício 1.3.3 Sendo x uma variável real, determine o conjunto-solução das seguintes condições:

$$\textbf{a}.\, x+2=\sqrt{4x+13} \qquad \textbf{b}.\,|x+2|=\sqrt{4-x}.$$

$$\textbf{c}.\, x^2-2|x|-3=0 \qquad \textbf{b}.\,\sqrt{x-4}=\sqrt{x+5}-9.$$

1.4 Operações lógicas e conjuntos

1.4.1 Relações entre conjuntos

Definidas as operações lógicas entre proposições e condições, e estabelecidas as suas propriedades, vamos presentemente estudar operações entre conjuntos. Vimos, na primeira secção deste capítulo, que o sinal de igual se coloca entre expressões designatórias que se referem a um mesmo objeto. No caso de dois conjuntos A e B, escrevemos «$A=B$» se A e B designarem o mesmo conjunto, ou seja, se A e B tiverem os mesmos elementos:

Definição 1.4.1: Igualdade entre conjuntos

Dados conjuntos A e B, diz-se que $A=B$ («A é igual a B») quando

$$\forall x, x\in A \Leftrightarrow x\in B.$$

Diremos também que um conjunto está contido num outro se todo o elemento do primeiro for um elemento do segundo:

Definição 1.4.2: Inclusão

Dados conjuntos A e B, diz-se que $A\subset B$ («A está contido em B») quando

$$\forall x, x\in A \Rightarrow x\in B.$$

A diz-se então um «subconjunto» ou uma «parte» de B.

A relação de inclusão verifica a seguintes três propriedades, sendo portanto uma relação de ordem sobre os conjuntos:

Proposição 1.4.1 Dados conjuntos A, B e C:

1. $A\subset A$;
2. $\Big((A\subset B)\wedge(B\subset A)\Big)\Leftrightarrow(A=B)$;
3. $\Big((A\subset B)\wedge(B\subset C)\Big)\Rightarrow(A\subset C)$.

A propriedade 2., dita «Princípio da dupla inclusão» é muito frequentemente usada para mostrar a igualdade de dois conjuntos, como teremos oportunidade de ilustrar mais adiante.

Demonstração.

1. Trata-se de provar que para todo o x, $x \in A \Rightarrow x \in A$, o que é verdade pelo ponto 1. da Proposição 1.1.6.
2. Aqui, é necessário verificar que para todo o x,
$$\Big((x \in A) \Rightarrow (x \in B)\Big) \wedge \Big((x \in B) \Rightarrow (x \in A)\Big) \qquad \text{e} \qquad (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$$
são equivalentes, o que sabemos do ponto 2. da Proposição 1.1.6.
3. Uma vez mais, esta propriedade decorre do ponto 3. da Proposição 1.1.6.

■

Este exemplo permite expor uma dualidade entre as relações entre conjuntos e as relações entre proposições, que resulta das próprias definições, e que se sistematiza no seguinte quadro:

Proposições	Conjuntos
$\Rightarrow$	$\subset$
$\Leftrightarrow$	$=$

Com efeito, substituindo as proposições por conjuntos, e os símbolos da coluna da esquerda pelos da direita, obtemos formalmente a Proposição 1.4.1 a partir da Proposição 1.1.6. Concretizaremos um pouco mais esta ideia nas próximas secções.

1.4.2 Operações entre conjuntos

Comecemos por definir a união e a interseção de dois conjuntos:

Teorema 1.4.2: União e Interseção

Dados conjuntos A e B, define-se o conjunto $A \cup B$ (a «união de A e B») por
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$
Também, $A \cap B$ (a «interseção de A e B») é dada por
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Constatemos desde já o seguinte: dados conjuntos A, B e C,tem-se
$$C = A \cup B \Leftrightarrow \forall x,\ (x \in C) \Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)].$$
Da mesma forma,
$$C = A \cap B \Leftrightarrow \forall x,\ (x \in C) \Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)].$$
Observando as expressões da esquerda e da direita destas equivalências, constata-se que se procedeu a uma substituição formal de acordo com a seguinte tabela:

Conjunto X	Condição p_X
$=$	$\Leftrightarrow$
$\cup$	$\vee$
$\cap$	$\wedge$

Por exemplo, a igualdade

$$A \cap \Big(B \cup C\Big) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

é formalmente equivalente à proposição

$$\forall x,\ (x \in A) \wedge \Big((x \in B) \vee (x \in C)\Big) \Leftrightarrow \Big((x \in A) \wedge (x \in B)\Big) \vee \Big((x \in A) \wedge (x \in C)\Big),$$

que sabemos ser verdadeira pela Proposição 1.1.3.
Podemos ainda alargar substancialmente o quadro acima. Introduzimos finalmente o conjunto vazio e um "conjunto Universo"por

Definição 1.4.3: Conjunto Vazio e conjunto Universo

Define-se o «conjunto vazio», denotado $\emptyset$ ou $\{\,\}$, como o conjunto que não contém qualquer elemento:

$$\emptyset = \{x : \sim (x = x)\}.$$

Em contraponto, um conjunto U que contenha "todos"os elementos, ou seja, que verifique a proposição

$$\forall x,\ x \in U$$

é dito «conjunto Universo».

e também o «complementar», num dado conjunto U, de um conjunto A:

Definição 1.4.4: Complementar

Dado um conjunto A e o Universo U, designamos por «complementar de A (em U)» o conjunto

$$A^c = \{x : x \notin A\}.$$

Com estas definições, e no espírito anterior, observemos que, dados conjuntos A e B:

$$A = B^c \Leftrightarrow \Big(\forall x, x \in A \Leftrightarrow \sim (x \in B)\Big), \qquad A = \emptyset \Leftrightarrow \Big(\forall x, x \in A \Leftrightarrow F\Big), \qquad A = U \Leftrightarrow \Big(\forall x, x \in A \Leftrightarrow V\Big).$$

Podemos pois alargar os quadros anteriores e estabelecer uma correspondência entre igualdades (ou inclusões) de conjuntos e equivalências (ou implicações) entre proposições:

Dualidade entre proposições e conjuntos
A uma igualdade (respetivamente a uma inclusão) entre conjuntos corresponde uma equivalência (respetivamente uma implicação) entre proposições, que se pode obter substituindo os símbolos à esquerda pelos símbolos à direita. As duas proposições assim obtidas têm o mesmo valor lógico.

Conjunto X	Condição p_X
$=$	$\Leftrightarrow$
$\subset$	$\Rightarrow$
$\cup$	$\vee$
$\cap$	$\wedge$
$.^c$	$\sim$
$\emptyset$	F
U	V

Em particular, a cada propriedade provada para proposições na secção 1.1.2 corresponde uma propriedade para conjuntos. Para ilustrar este princípio, vamos transcrever a Proposição 1.1.1, a Proposição 1.1.8 e o Teorema 1.1.4.

- A Proposição 1.1.1 afirma que, dadas proposições p, q e r,
  1. $p \wedge V \Leftrightarrow p$ (V é dito «elemento neutro da conjunção»);
  2. $p \wedge F \Leftrightarrow F$ (F é dito «elemento absorvente da conjunção»);
  3. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (associatividade);
  4. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (comutatividade).

Temos assim, do ponto de vista dos conjuntos:

Proposição 1.4.3 Dados conjuntos A, B, e C,

1. $A \cap U = A$ (U é o elemento neutro da interseção);
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$ ($\emptyset$ é elemento absorvente da interseção);
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associatividade);
4. $A \cap B = B \cap A$ (comutatividade).

- A Proposição 1.1.8 estabelece que a implicação contra-recíproca é equivalente à implicação inicial: dadas proposições p e q, $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

Do ponto de vista dos conjuntos,

Proposição 1.4.4 Dados conjuntos A e B,

$$A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c.$$

- O Teorema 1.1.4 estabelece as primeiras Leis de De Morgan para proposições: dadas proposições p e q:
  1. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$;
  2. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$.

Assim,

Teorema 1.4.5: Terceiras Leis de De Morgan

Dados conjuntos A e B,

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Deixamos ao cuidado do leitor a transcrição para a linguagem dos conjuntos das restantes propriedades das operações sobre proposições estudadas previamente.

Terminamos com a definição de diferença entre dois conjuntos, muito útil em diversas situações:

Definição 1.4.5

Dados conjuntos A e B, define-se $A \setminus B$ (a «diferença de A e B) por

$$A \setminus B = \{x,\ (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Este conjunto é pois constituído pelos elementos que pertencem a A e não a B. É imediato verificar que

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

1.4.3 Exercícios

Exercício 1.4.1 Demonstre as seguintes igualdades entre conjuntos:

$$\mathbf{a}.\ (A \cap B^c)^c = A^c \cup B \qquad \mathbf{b}.\ A \cap (A \cup B) = A \qquad \mathbf{c}.\ A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B).$$

Exercício 1.4.2 Considere os conjuntos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, n \neq m^2\} \qquad \text{e} \qquad B = \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : n = 10m + 2\}.$$

Mostre que $B \subset A$.

Exercício 1.4.3 Considere os conjuntos

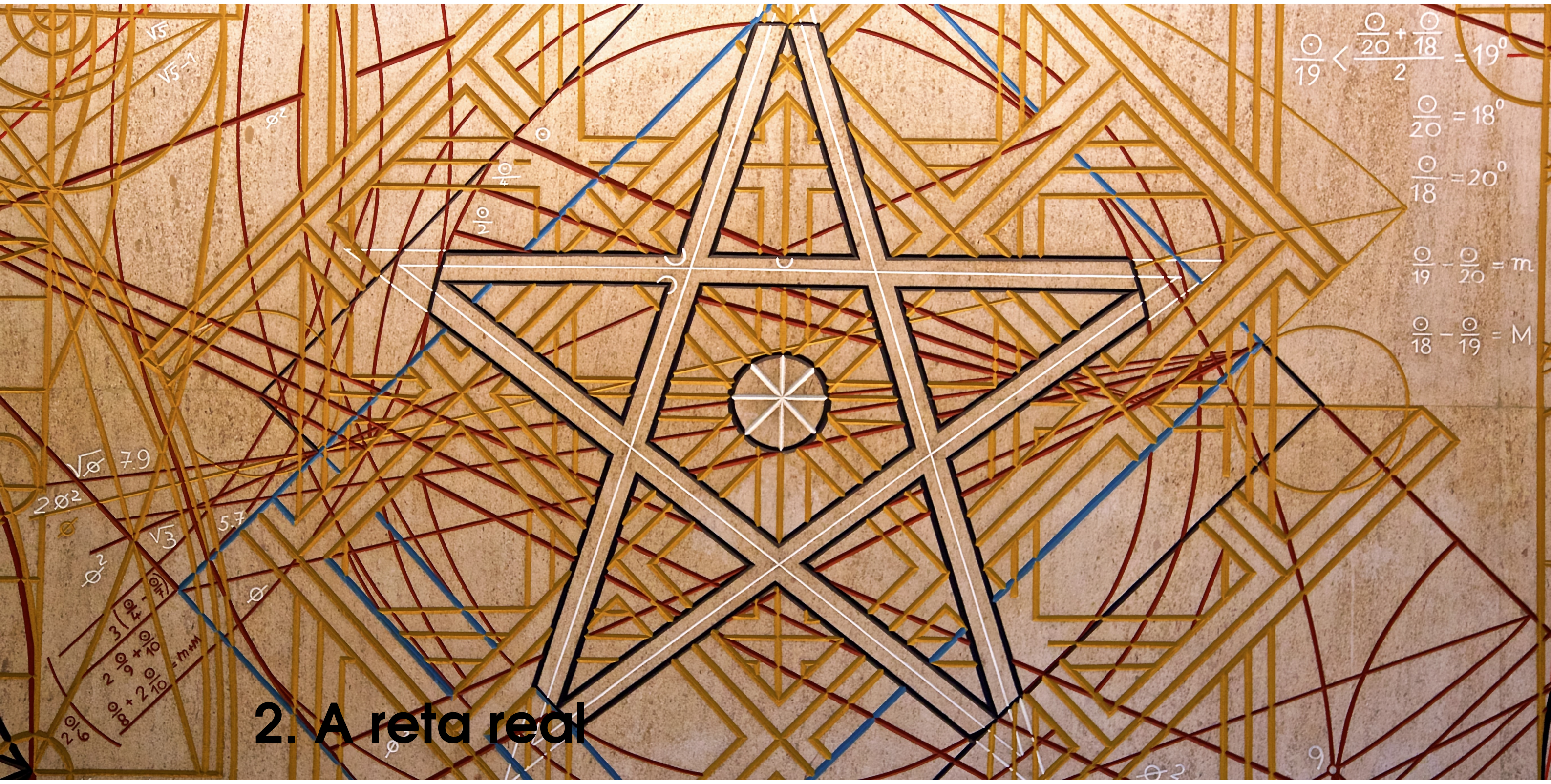
$$A = \{n \in \mathbb{N} : (n > 5) \wedge (\ n \text{ é primo})\} \qquad \text{e} \qquad B = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, n \neq 10m + 5\}.$$

Que relações de inclusão se podem estabelecer entre A e B? Justifique.

Exercício 1.4.4 Define-se a união e a interseção generalizada de uma família de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ indexada por um dado conjunto I por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I : x \in A_i\} \qquad \text{e} \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I, x \in A_i\}$$

Calcule estes dois conjuntos para $I = \mathbb{N}$ e $A_i = \left[\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}\right]$.



2. A reta real

2.1 A reta real

Entendemos por reta real uma reta munida de uma origem 0, de uma distância unidade e de uma orientação. Estes três elementos permitem associar a cada ponto da reta um número real (a respetiva abcissa) e, reciprocamente, a cada número real fica inequivocamente associado um ponto.

Tal como é usual, as abcissas dos pontos da reta serão confundidas com os próprios pontos que representam. Nesse sentido, falaremos indistintamente do "número real 1" ou do "ponto 1 da reta real".

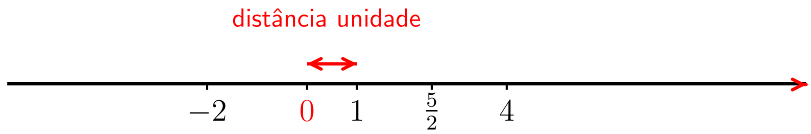


Figura 2.1: A reta real e alguns dos seus pontos

2.2 Relação de ordem na reta real

A reta real encontra-se munida da relação natural de ordem $\leq$, que verifica as seguintes propriedades elementares:

1. $\forall a \in \mathbb{R}, a \leq a$ (reflexividade);
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$ (antissimetria);
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (transitividade).

Definimos de seguida um certo número de conceitos elementares associados à relação de ordem:

Definição 2.2.1: Conjuntos majorados e minorados

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto da reta real.

1. A diz-se «majorado» se existir $M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A, x \leq M$.
   O número M diz-se então um «majorante» de A;
2. A diz-se «minorado» se existir $m \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A, m \leq x$.
   O número m diz-se então um «minorante» de A;
3. A diz-se «limitado» se for simultaneamente majorado e minorado.

Um conjunto majorado A admite um número infinito de majorantes. De facto, se M for um majorante de A, qualquer número real M' com $M' \geq M$ é trivialmente um majorante de A. Da mesma forma, os conjuntos minorados admitem um infinidade de minorantes.

Exemplo 2.2.1 Seja $A =]-4;-2] \cup [1;3]$.

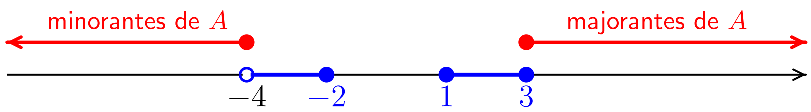


Figura 2.2: Conjuntos dos majorantes e dos minorantes de $A =]-4;-2] \cup [1;3]$

O conjunto A é majorado, sendo $[3;+\infty[$ o conjunto dos majorantes de A. O conjunto A é igualmente minorado e $]-\infty;-4]$ é o conjunto dos minorantes de A. Trata-se portanto de um conjunto limitado.

No exemplo anterior, $M = 3$ é o mais pequeno majorante de A. Por ser de certa forma "o majorante mais preciso"(por não existir nenhum outro que lhe seja inferior) é comum designá-lo por "supremo":

Definição 2.2.2: Supremo

Seja $A \subset \mathbb{R}$.
Se existir, o mais pequeno majorante de A designa-se por «supremo de A» e é denotado por «$\sup(A)$».

Dado um conjunto majorado A, coloca-se naturalmente o problema da existência do supremo. Tomemos um exemplo extremo: $A = \emptyset$. A proposição

$$\forall x \in A, x \leq 1$$

tem valor lógico verdadeiro. De facto, para cada $x \in A$, é necessário testar se $x \leq 1$. Ora, como A não contém nenhum elemento, não há nada a testar, trata-se de uma condição universal! Assim, 1 é um majorante de A, e substituindo neste raciocínio 1 por um qualquer outro real M, obtém-se que todos os números são majorantes de A, não admitindo portanto este conjunto um mais pequeno majorante.

O seguinte axioma, utilizado na construção dos números reais, garante que o conjunto vazio é o único exemplo possível desta situação:

Axioma do Supremo Todo o conjunto não vazio e majorado admite supremo.

De forma análoga,

Definição 2.2.3: Ínfimo

Seja $A \subset \mathbb{R}$.
Se existir, o maior minorante de A designa-se por «ínfimo de A» e é denotado por «$\inf(A)$».

Por exemplo,

$$\inf(]-4;-2] \cup [1;3]) = -4.$$

O axioma do supremo permite mostrar o seguinte resultado de existência:

Proposição 2.2.1 Todo o conjunto não vazio e minorado admite ínfimo.

Demonstração. Seja A um conjunto não vazio e minorado, m um minorante de A e $(-A)$ o conjunto definido por

$$(-A) = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}.$$

Tem-se, por definição, que $\forall x \in A,\ m \leq x$, ou seja, $\forall x \in A,\ -x \leq -m$, ou ainda $\forall y \in (-A),\ y \leq -m$. Assim,

$$m \text{ é minorante de } A \ \Leftrightarrow -m \text{ é majorante de } (-A),$$

e, se $\mathscr{M}$ for o conjunto dos minorantes de A, $(-\mathscr{M})$ é o conjunto dos majorantes de $(-A)$.
Seja agora, pelo axioma do supremo, s o supremo de $(-A)$ (conjunto não vazio e majorado). É fácil ver que $-s$ é o ínfimo de A:

- $-s$ é minorante de A porque s é majorante de $(-A)$;
- Por definição de supremo (de A),

  $$\forall x \in (-\mathscr{M}),\ s \leq x,$$

  logo

  $$\forall y \in \mathscr{M},\ s \leq -y,$$

  ou seja,

  $$\forall y \in \mathscr{M},\ y \leq -s.$$

■

Retomando o exemplo do conjunto $A =]-4;-2] \cup [1;3]$, tem-se que

$$\inf(A) = -4 \notin A \text{ e } \sup(A) = 3 \in A.$$

De facto, o ínfimo e o supremo de um dado conjunto podem ou não pertencer ao próprio conjunto. Esta constatação sugere as seguintes definições:

Definição 2.2.4: Máximo e mínimo

Seja A um conjunto não vazio e majorado. Se $\sup(A) \in A$ diz-se que «A admite máximo» e define-se o «máximo de A» por

$$\max(A) = \sup(A).$$

Da mesma forma, se $\inf(A) \in A$, «A admite mínimo» e define-se o «mínimo de A» por

$$\min(A) = \inf(A).$$

Exemplo 2.2.2 O conjunto $A =]-4;-2] \cup [1;3]$ não admite mínimo e tem-se

$$\max(A) = \sup(A) = 3.$$

Terminamos esta secção com uma caracterização do supremo muito útil na prática:

Proposição 2.2.2 Caracterização do supremo
Seja A um conjunto majorado não vazio. O número real $S \in \mathbb{R}$ é o supremo de A se e só se

1. S é majorante de A;
2. Para todo o $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $x > S - \varepsilon$.

Demonstração. Basta observar que a segunda condição é equivalente a dizer que $S' = S - \varepsilon$ não é majorante de A (existe um elemento de A superior a S'). Assim, não existem majorantes de A inferiores a S, pelo que se S for majorante é o menor. ■

Exemplo 2.2.3 Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo do conjunto

$$A = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \ldots \right\}.$$

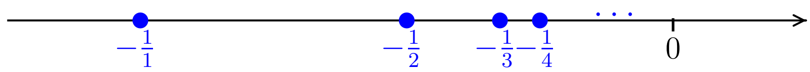


Figura 2.3: Conjunto $A = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Facilmente se deduz que A admite mínimo e que

$$\min(A) = \inf(A) = -1.$$

Vamos agora demonstrar que $\sup(A) = 0$.

1. 0 é um majorante de A já que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{n} \leq 0$.
2. Seja $\varepsilon > 0$. É necessário determinar um elemento $x = -\frac{1}{n} \in A$ tal que $0 - \varepsilon < x$. Tem-se

$$-\varepsilon < x \Leftrightarrow -\varepsilon < -\frac{1}{n} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

   Basta pois tomar um número natural n nestas condições.

Assim $\sup(A) = 0$. Finalmente, como $0 \notin A$, A não admite máximo.

2.3 Exercícios

Exercício 2.3.1 Escreva em notação matemática cada um dos seguintes conjuntos e proposições:

(a) Os números inteiros múltiplos de 6;
(b) Os números que não são negativos nem têm parte inteira par;
(c) Se me der um número real positivo,consigo encontrar outro número real maior;
(d) Dado um número real y, existe um número positivo x que, se for maior do que y, então é maior do que y^2;

(e) Entre dois quaisquer números racionais existe um número irracional;
(f) Para qualquer escolha de x encontro sempre um inteiro com inverso menor do que x.

.

Exercício 2.3.2 Considere os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |3x-4| \geq x^2\} \qquad \text{e} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x|} \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Represente os intervalos A, $A \cap B$ e $A \setminus B$ na forma de união de intervalos.
(b) Indique o valor lógico da proposição $\forall x \in B, \exists y \in B : x+y=0$.
(c) Indique o valor lógico da proposição $\exists y \in B : \forall x \in B, x+y=0$.

Exercício 2.3.3 Seja $A \subset \mathbb{R}$. O ponto $a \in A$ diz-se «ponto isolado de A» se existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathscr{V}_\varepsilon(a) \cap A = \{a\}.$$

(a) Mostre que os pontos isolados são todos os pontos aderentes que não são de acumulação.
(b) Identifique, caso existam, os pontos isolados dos conjuntos A_1, A_2 e A_3, definidos no Exercício 3.3.6.

Exercício 2.3.4 Indique, caso existam, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo dos seguintes conjuntos e identifique aqueles que são limitados:

(a) $A = \left[-1; \frac{1}{2}\right[\cup \left[4; \frac{16}{3}\right[$ (b) $B = [-3;\sqrt{2}] \cup \left\{-\frac{9}{2}\right\}$ (c) $C =]-\infty; \sqrt{5}[$

(d) $D = [-7;-2] \cup \left[\frac{1}{6}; +\infty\right[$ (e) $E = [-5\pi; 15] \setminus \mathbb{N}$ (f) $F = \{1-n : n \in \mathbb{N}\}$

Exercício 2.3.5 Escreva os seguintes conjuntos na forma de intervalos (ou de união disjunta de intervalos) e indique, caso existam, os respetivos supremo, ínfimo, máximo e mínimo:

(a) $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 3\}$ (b) $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x+6| \geq 9\}$

(c) $A_3 = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{2}{3} - 4x\right| \geq 1\right\}$ (d) $A_4 = \{x \in \mathbb{R} : |8-5x| \geq 4 \wedge x < 7\}$

(e) $A_5 = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 11 \wedge x \geq 2\}$ (f) $A_6 = \{x \in \mathbb{R} : |x^2-2| \geq 1 \wedge x \geq 0\}$

(g) $A_7 = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1\right\}$

Exercício 2.3.6

(a) Mostre, utilizando o critério enunciado na Proposição 2.2.2, que

$$\sup\left\{\frac{n^2}{1+n^2} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1.$$

(b) Formule uma caracterização do ínfimo análoga à do supremo apresentada na Proposição 2.2.2.

(c) Mostre, recorrendo à caracterização formulada na alínea anterior, que

$$\inf\left\{-\frac{n}{1+2n} : n \in \mathbb{N}\right\} = -\frac{1}{2}.$$

Exercício 2.3.7 Indique, sem demonstrar, os conjuntos dos majorantes e dos minorantes de cada um dos seguintes conjuntos:

(a) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ (b) $\left\{\frac{n^2}{1+n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ (c) $\left\{-\frac{1}{3+2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(d) $\left\{\frac{1}{4n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ (e) $\left\{-\frac{2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ (f) $\left\{\frac{3}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercício 2.3.8 Seja $A \subset \mathbb{R}$.
Mostre que A é limitado se e só se existir $L > 0$ tal que $\forall x \in A, |x| \leq L$.

Exercício 2.3.9 Seja A um conjunto minorado por m.

(a) Mostre que $-A = \{-a : a \in A\}$ é majorado por $M = -m$.

(b) Mostre que $\inf(A) = -\sup(-A)$.

Exercício 2.3.10 Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois conjuntos não vazios e limitados.

(a) Justifique que $A \cup B$ é majorado e que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A); \sup(B)\}$.

(b) Enuncie uma igualdade análoga à da alínea anterior relacionando $\inf(A \cup B)$, $\inf(A)$ e $\inf(B)$.

Exercício 2.3.11 Seja A um subconjunto real não vazio e majorado, e seja s o supremo de A.
Prove que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : s - \varepsilon < a.$$

Exercício 2.3.12 Seja $A \subset \mathbb{Z}$, minorado. Mostre que A admite um mínimo.

2.4 Partes finitas e infinitas da reta real

Recordemos que uma «bijeção» entre dois conjuntos A e B é uma função $f : A \to B$ que verifica as seguintes propriedades:

1. Para todo o elemento $b \in B$, existe um elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$ (diz-se que f é «sobrejetiva»);
2. Dados quaisquer elementos a_1 e a_2 de A, $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ (diz-se que f é «injetiva»).

Dada uma função $f : A \to B$ que satisfaz estas duas propriedades, é fácil verificar que f define uma relação «biunívoca» entre o conjunto A e o conjunto B: a cada elemento $a \in A$ corresponde um e apenas um elemento $b \in B$ ($b = f(a)$). Reciprocamente, a cada elemento $b \in B$ corresponde um e apenas um elemento de A: o único elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. De facto, a sobrejetividade garante a existência de um tal $a \in A$ e a injetividade garante a sua unicidade: "casámos", dois a dois, os elementos de A com os elementos de B. É natural pensar, nestas circunstâncias, que os conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade, ou seja, o mesmo "número de elementos". É o que motiva a seguinte definição:

Definição 2.4.1: Equipotência

Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$. Diremos que A e B são ≪equipotentes≫ ($A \sim B$) se existir uma bijeção $f : A \to B$.
Diremos ainda, nesta situação, que A e B têm a mesma ≪cardinalidade≫: $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$.

A relação de equipotência é uma relação de equivalência. Deixamos em exercício a respetiva prova:

Dados $A, B, C \subset \mathbb{R}$,

1. $A \sim A$ (reflexividade);
2. $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$ (simetria);
3. $(A \sim B) \wedge (B \sim C) \Rightarrow (A \sim C)$ (transitividade).

2.4.1 Partes finitas de $\mathbb{R}$

. Para $N \in \mathbb{N}_0$, consideremos o conjunto

$$\mathbb{F}_N = \{n \in \mathbb{N} : n \leq N\} = \{1; 2; 3; \ldots N\}$$

dos N primeiros números naturais ($\mathbb{F}_0 = \emptyset$). Temos então a seguinte definição:

Definição 2.4.2: Conjuntos Finitos

O conjunto $A \subset \mathbb{R}$ diz-se ≪finito≫ se existir $N \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$A \sim \mathbb{F}_N.$$

Diremos então que ≪A tem cardinalidade N≫ ($\mathrm{card}(A) = N$).
Finalmente, se A não for finito, dir-se-à ≪infinito≫.

É relativamente fácil observar que dados dois inteiros N e M, os conjuntos $\mathbb{F}_N$ e $\mathbb{F}_M$ não são equipotentes, pelo que o cardinal de um conjunto finito fica corretamente definido.
Por exemplo, o conjunto $A = \left\{2; \frac{3}{2}; -2; 4\right\}$ está em bijeção com $\mathbb{F}_4$. Para o observar basta considerar a bijeção $f : A \to \mathbb{F}_4$ definida por $f(2) = 1$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$, $f(-2) = 3$ e $f(4) = 4$. Assim, $\mathrm{card}(A) = 4$.
Nada do que foi dito até aqui é especialmente surpreendente. A definição anterior apenas formaliza o acto de “contar” o número de elementos de um dado conjunto, algo que fazemos desde tenra idade. Contudo, a situação torna-se mais complexa no caso de conjuntos infinitos, como veremos na secção seguinte.

2.4.2 Partes infinitas de $\mathbb{R}$

. Comecemos por uma definição:

Definição 2.4.3: Conjuntos numeráveis

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Se $A \sim \mathbb{N}$, A diz-se numerável.
Também, se A for finito ou numerável, A diz-se contável.

Uma primeira observação intrigante: consideremos o conjunto $\mathscr{I}$ formado pelos números naturais ímpares.
Trata-se de um subconjunto próprio do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, isto é, $\mathscr{I} \subset \mathbb{N}$ mas $\mathscr{I} \neq \mathbb{N}$. Apesar de ambos os conjuntos serem infinitos, poderíamos pensar intuitivamente que $\mathscr{I}$ tem "menos"elementos do que $\mathbb{N}$, até talvez "metade" dos elementos, já que os números naturais se dividem equitativamente entre números pares e números ímpares. Contudo,

$$\mathscr{I} \sim \mathbb{N},$$

ou seja, $\operatorname{card}(\mathscr{I}) = \operatorname{card}(\mathbb{N})$: é possível "casar dois a dois"os números ímpares com os números naturais! Com efeito, basta considerar a função

$$f : n \in \mathbb{N} \to 2n - 1 \in \mathscr{I}.$$

De facto, seja um número ímpar $x \in \mathscr{I}$. Por definição $x+1$ é par, isto é, divisível por 2. Assim, tomando $n = \dfrac{x+1}{2}$, tem-se $f(n) = 2 \times \dfrac{x+1}{2} - 1 = x$ e f é sobrejetiva. É igualmente fácil verificar que f é injetiva: dados números naturais n_1 e n_2,

$$f(n_1) = f(n_2) \Leftrightarrow 2n_1 - 1 = 2n_2 - 1 \Leftrightarrow n_1 = n_2.$$

Finalmente, f é bijetiva.

Este resultado é na realidade um caso particular da seguinte propriedade:

Proposição 2.4.1 Seja $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto infinito. Então A é numerável.

Demonstração. Basta ordenar os elementos de A. Comecemos por considerar o menor elemento de A, u_1. Consideramos de seguida o menor elemento de $A \setminus \{u_1\}$, u_2, e o menor elemento de $A \setminus \{u_1; u_2\}$, u_3. Continuando este processo, definimos

$$u_n = \min(A \setminus \{u_1; \ldots; u_{n-1}\}).$$

Note-se que pelo Exercício 2.3.12, u_n está bem definido. Por outro lado, como A é infinito, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $A \setminus \{u_1; \ldots; u_{n-1}\}$ é não vazio. Assim, este processo não termina, definindo-se assim uma sucessão (u_n) crescente tal que

$$A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\},$$

e, por construção, $f : n \in N \to u_n \in A$ é uma bijeção. ■

Tem-se igualmente o seguinte resultado algo surpreendente: o conjunto dos pares ordenados

$$\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 = \{(n,m) : n \in \mathbb{N}_0 \wedge m \in \mathbb{N}_0\}$$

é numerável. O leitor poderá estabelecer uma expressão analítica para uma bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ com base na ideia expressa no seguinte esboço:

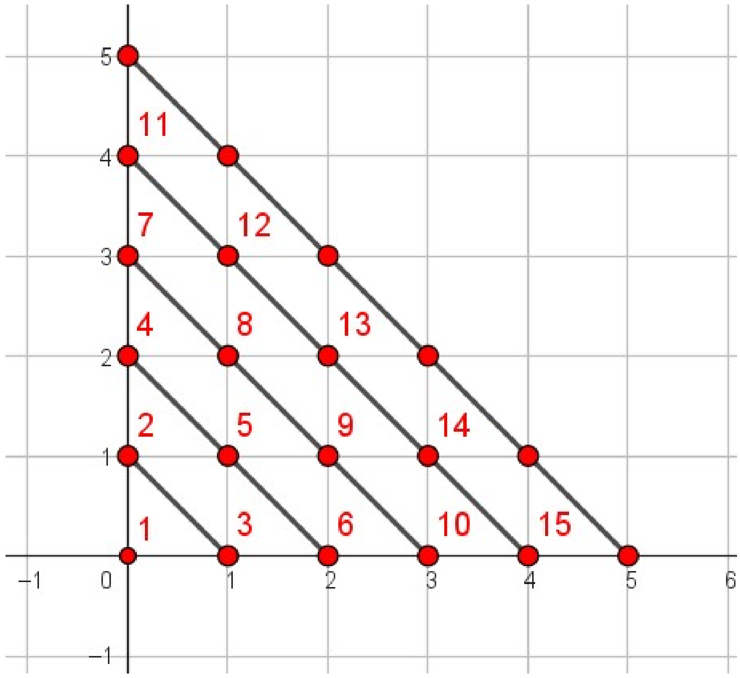


Figura 2.4: Enumerabilidade de $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

Para além das partes infinitas de $\mathbb{N}$, também o conjunto dos números racionais é numerável:

Teorema 2.4.2

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é numerável.

Demonstração. Representemos $\mathbb{Q}$ na forma

$$\mathbb{Q} = \left\{\varepsilon \frac{a}{b} : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \{-1;0;1\} \text{ e } a \text{ e } b \text{ primos entre si}\right\}.$$

Note-se que a escrita de um número racional q na forma $\varepsilon \frac{a}{b}$ é unica. Consideremos também o conjunto

$$P = \{2^a 3^b 5^{1+\varepsilon} : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \{-1;0;1\}\}.$$

Por unicidade da decomposição em fatores primos, a função $f : \mathbb{Q} \to P$ definida por

$$f(q) = f\left(\varepsilon \frac{p}{q}\right) = 2^a 3^b 5^{1+\varepsilon}$$

é bijetiva. Como P é numerável pelo Teorema anterior (trata-se de um conjunto infinito contido em $\mathbb{N}$), $\mathbb{Q}$ é numerável. ■

Aqui chegados, coloca-se a questão de saber se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são contáveis. O próximo Teorema mostra que a resposta é negativa, colocando a nu a existência de "infinitos maiores do que outros infinitos":

Teorema 2.4.3

O intervalo real $]0;1[$ é não numerável.

Demonstração. A prova deste Teorema, clássica em Matemática, utiliza um método conhecido por ≪extração diagonal de Cantor≫. Trata-se de uma demonstração pelo absurdo: suponha-se que $f : \mathbb{N} \to]0;1[$ é uma bijeção, e consideremos a representação decimal da imagem do número natural n por f:

$$f(n) = 0, a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\dots.$$

Tomemos agora o número real

$$x = 0, x_1x_2x_3\dots\dots$$

escolhido por forma a que $x_1 \neq a_{1,1}$, $x_2 \neq a_{2,2}$, e, de forma mais geral,

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq a_{n,n}.$$

Esta inigualdade garante que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x \neq f(n)$: se se tivesse $x = f(n)$ então a n-ésima decimal de x (x_n) deveria coincidir com a n-ésima decimal de $f(n)$ ($a_{n,n}$). Assim, f não é bijetiva, tendo-se portanto uma contradição. ■

Temos assim, em termos de cardinalidade, uma hierarquia de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

1. Os conjuntos finitos (e de cardinal finito);
2. Os conjuntos numeráveis, como por exemplo $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ (ver Exercício 2.4.2) ou $\mathbb{Q}$. O cardinal destes conjuntos é dito ≪aleph 0≫ ($\aleph_0$).
3. Os conjuntos não numeráveis, como o intervalo $]0;1[$ ou a própria reta real $\mathbb{R}$ (ver exercício 2.4.6). O cardinal destes conjuntos é dito ≪aleph 1≫ ($\aleph_1$).

Os cardinais $\aleph_0$ e $\aleph_1$ são ambos infinitos. Contudo, os conjuntos $\aleph_1$ são “maiores”em termos de cardinalidade. Como foi dito acima, existem “infinitos de dimensão diferente”.

Uma questão natural é a de saber se existirão subconjuntos de $\mathbb{R}$ que não pertençam a nenhuma das 3 categorias acima, nomeadamente se existem conjuntos com uma cardinalidade intermédia entre $\aleph_0$ e $\aleph_1$. Trata-se de uma pergunta à qual não existe resposta dentro da axiomática que serve de base à construção dos números reais. Terá de ser um axioma suplementar. A grande maioria dos matemáticos junta pois um axioma, dito “hipótese do contínuo”, que afirma não existirem subconjuntos de $\mathbb{R}$ nessas condições.

2.4.3 Exercícios

Exercício 2.4.1 Mostre que a relação de equipotência é uma relação de equivalência sobre as partes de $\mathbb{R}$.

Exercício 2.4.2 Mostre que $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.
Sugestão: considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \frac{n}{2} \text{ se } n \text{ for par e } f(n) = -\frac{n-1}{2} \text{no caso contrário.}$$

Exercício 2.4.3

1. Seja A um conjunto finito e B um conjunto numerável. Mostre que $A \cup B$ é numerável.

2. Mostre que se A e B forem conjuntos numeráveis, $A \cup B$ é numerável.

Exercício 2.4.4 Inspirando-se da prova da numerabilidade do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, mostre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é numerável.

Exercício 2.4.5 Mostre que todo o subconjunto infinito de um conjunto numerável é numerável.

Exercício 2.4.6

1. Estabeleça uma bijeção entre os intervalos $]0;1[$ e $]-1;1[$.

2. Estabeleça uma bijeção entre $]-1;1[$ e $\mathbb{R}$ e deduza que $\mathbb{R}$ não é numerável.

3. Alguns elementos de topologia

3.1 Primeiras definições topológicas

Neste capítulo introdutório vamos considerar alguns aspetos da topologia elementar da reta real. De maneira geral, a topologia (do grego $\tau o\pi o\zeta$=lugar e $\lambda o\gamma o\zeta$=estudo) de um conjunto procura estudar as relações espaciais entre os pontos que o constituem. Nesse espírito, abordaremos aqui diversos aspetos e relações entre os pontos da reta real.

Comecemos por introduzir a noção fundamental de vizinhança:

Definição 3.1.1: Vizinhança de um ponto

Seja $a \in \mathbb{R}$. Chama-se «vizinhança de a» a todo o intervalo da forma

$$\mathscr{V}_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon; a+\varepsilon[,$$

onde $\varepsilon > 0$.

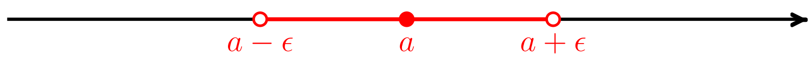


Figura 3.1: Vizinhança do ponto a

Recordemos que a distância euclidiana entre dois números reais x e y é dada por $d(x;y) := |x-y|$. A vizinhança $\mathscr{V}_\varepsilon(a)$ é pois constituída pelos pontos que se encontram a uma distância de a inferior a ε:

$$x \in \mathscr{V}_\varepsilon(a) \Leftrightarrow d(x;a) < \varepsilon \Leftrightarrow |x-a| < \varepsilon.$$

3.1.1 Interior, Exterior e Fronteira de um conjunto

Iniciamos esta secção pela definição de ponto interior a um subsconjunto A da reta real:

Definição 3.1.2: Ponto interior a um conjunto

Seja $A \subset \mathbb{R}$. O ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se «ponto interior a A» se

$$\exists \varepsilon > 0 : \mathscr{V}_\varepsilon(a) \subset A.$$

Um ponto a é pois interior a A se existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$d(x;a) < \varepsilon \Rightarrow x \in A.$$

Exemplo 3.1.1 Seja $A =]0;2] \cup \{5\} \cup [6;+\infty[$. O ponto $a = 1$ é interior a A já que, tomando por exemplo $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$,

$$]1-\varepsilon; 1+\varepsilon[\subset A.$$

Em contrapartida, o ponto $a = 6$ não é interior a A: qualquer que seja $\varepsilon > 0$,

$$\mathscr{V}_\varepsilon(6) =]6-\varepsilon; 6+\varepsilon[\not\subset A.$$

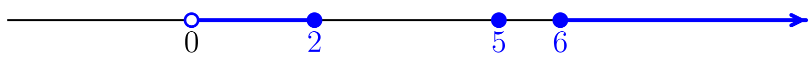


Figura 3.2: Conjunto $A =]0;2] \cup \{5\} \cup [6;+\infty[$

É o momento oportuno para introduzirmos uma expressão algo informal mas muito utilizada em topologia: a de «pontos arbitrariamente próximos». Para que fique bem compreendida, optámos por estabelecer uma definição precisa deste conceito.

Definição 3.1.3: Pontos arbitrariamente próximos

Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Diz-se que «existem pontos de X arbitrariamente próximos de x_0» se qualquer vizinhança de x_0 contiver pelo menos um ponto de X:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, x \in \mathscr{V}_\varepsilon(x_0),$$

ou, de forma equivalente,

$$\forall \varepsilon > 0, X \cap \mathscr{V}_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset.$$

Com este vocabulário, dizer que um dado ponto $a \in A$ é interior a A é o mesmo do que dizer que não existem pontos de A^c arbitrariamente próximos de a.

Existem também pontos da reta real que não admitem pontos de A arbitrariamente próximos. Esses pontos são ditos «pontos exteriores a A»:

Definição 3.1.4: Ponto exterior a um conjunto

Seja $A \subset \mathbb{R}$. O ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se «ponto exterior a A» se

$$\exists \varepsilon > 0 : \mathscr{V}_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset.$$

Exemplo 3.1.2 Considerando uma vez mais o conjunto $A =]0;2] \cup \{5\} \cup [6;+\infty[$, o ponto $a = 3$ é exterior a A: tomando por exemplo $\varepsilon = 1$,

$$]3-\varepsilon;3+\varepsilon[\cap A = \emptyset.$$

A prova da seguinte propriedade, praticamente imediata, é deixada em exercício:

Proposição 3.1.1 Seja $a \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$. Então,

$$a \text{ é exterior a } A \Leftrightarrow a \text{ é interior a } A^c.$$

Finalmente, pode naturalmente acontecer que existam pontos de A e de A^c arbitrariamente próximos de um dado ponto a da reta real. Neste caso, a dir-se-á um ponto fronteira:

Definição 3.1.5: Ponto fronteira de um conjunto

Seja $A \subset \mathbb{R}$. O ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se «ponto fronteira de A» se

$$\forall \varepsilon > 0, \left(\mathscr{V}_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad \mathscr{V}_\varepsilon(a) \cap A^c \neq \emptyset\right).$$

Sendo esta definição simétrica em A e A^c, é imediato verificar a seguinte propriedade:

Proposição 3.1.2 Seja $a \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$. Então,

$$a \text{ é ponto fronteira de } A \Leftrightarrow a \text{ é ponto fronteira de } A^c.$$

Exemplo 3.1.3 Note-se que um ponto fronteira de A pode ou não pertencer a A. Retomando o conjunto $A =]0;2] \cup \{5\} \cup [6;+\infty[$, é fácil verificar que os pontos 0, 2, 5 e 6 são os pontos fronteira de A.

Estabelecidas as noções de ponto interior, exterior e fronteira, definem-se por extensão os seguintes três conjuntos:

Definição 3.1.6: Interior, Fronteira e Exterior de um conjunto

Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, designa-se por «interior de A» ($\text{int}(A)$), «fronteira de A» (∂A) e «exterior de A» ($\text{ext}(A)$), respetivamente, o conjunto dos pontos interiores, fronteira e exteriores de A.

Tomando uma vez mais o exemplo do conjunto $A =]0;2] \cup \{5\} \cup [6;+\infty[$, tem-se

- $\text{int}(A) =]0;2[\cup]6;+\infty[$;
- $\partial A = \{0;2;5;6\}$;
- $\text{ext}(A) =]-\infty;0[\cup]2;5[\cup]5;6[$.

Observe-se que estes três conjuntos são dois a dois disjuntos e que a respetiva união é igual a $\mathbb{R}$. Diz-se, nesta situação que formam uma ≪partição≫ de $\mathbb{R}$.
Trata-se, na verdade, de uma propriedade mais geral:

Teorema 3.1.3: Partição da Reta Real

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Então:

1. $\text{int}(A) \cap \partial A = \emptyset$, $\text{ext}(A) \cap \partial A = \emptyset$, $\text{int}(A) \cap \text{ext}(A) = \emptyset$;
2. $\text{int}(A) \cup \text{ext}(A) \cup \partial A = \mathbb{R}$.

A prova desta propriedade, que é essencialmente um exercício de Lógica Bivalente, é deixada em exercício.

3.1.2 Aderência e Derivado de um conjunto

Definido o interior e a fronteira de um subconjunto A da reta real, é de grande interesse nomear a reunião destes dois conjuntos:

Definição 3.1.7: Aderência de A

Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, designa-se por ≪aderência de A≫ o conjunto

$$\overline{A} = \text{int}(A) \cup \partial A.$$

Os pontos de $\overline{A}$ dizem-se ≪pontos aderentes a A≫.

Pelo teorema 3.1.3, os pontos da aderência são os pontos que não pertencem ao exterior de A, ou seja, que se encontram de certa forma "colados" ao conjunto A, de onde a escolha do termo ≪aderentes≫.

Exemplo 3.1.4 Sendo $A =]0;2] \cup \{5\} \cup [6;+\infty[$, tem-se

$$\overline{A} = [0;2] \cup \{5\} \cup [6;+\infty[.$$

Também, sendo $\overline{A}$ o complementar do exterior de A, é imediato provar a seguinte propriedade, que afirma que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é aderente a A se e só se qualquer vizinhança de a intercetar o conjunto A:

Proposição 3.1.4 Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Então $a \in \overline{A} \Leftrightarrow \Big(\forall \varepsilon > 0,\ \mathscr{V}_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset\Big)$.

Tem-se a seguinte propriedade:

Proposição 3.1.5 Dado $A \subset \mathbb{R}$, $\overline{A} = \text{int}(A) \cup \partial A = A \cup \partial A$.

Demonstração. A inclusão

$$\text{int}(A) \cup \partial A \subset A \cup \partial A$$

é imediata, já que $\text{int}(A) \subset A$. Para concluir por dupla inclusão, devemos ainda provar a inclusão

$$A \cup \partial A \subset \text{int}(A) \cup \partial A.$$

Seja então $x \in A \cup \partial A$.

- Se $x \in \partial A$, é imediato que $x \in \text{int A} \cup \partial A$;
- Se $x \in A$, $x \notin \text{ext}(A)$. Como, pelo Teorema 3.1.3, $(\text{ext}(A))^c = \text{int}(A) \cup \partial A$, obtém-se que, também neste caso, $x \in \text{int}(A) \cup \partial A$.

. ■

Definida a noção de ponto aderente, introduzimos agora os chamados «pontos de acumulação»:

Definição 3.1.8: Ponto de acumulação e conjunto derivado

Seja $A \subset \mathbb{R}$. O ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se «ponto de acumulação de A» se qualquer vizinhança de A contiver um número infinito de pontos de A:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathscr{V}_\varepsilon(a) \cap A \text{ é um conjunto infinito.}$$

O conjunto dos pontos de acumulação de A é dito «derivado de A» e denotado A'.

Trata-se de uma definição próxima da de ponto de aderente. Para esses pontos, pede-se que a interseção $\mathscr{V}_\varepsilon(a) \cap A$ seja não vazia. Aqui, pede-se que seja infinita. É por essa razão imediato que

Proposição 3.1.6 Dado $A \subset \mathbb{R}$,

$$A' \subset \overline{A}.$$

A caracterização seguinte permite distinguir, de forma clara, a diferença entre ponto aderente e ponto de acumulação:

Teorema 3.1.7: Caracterização dos pontos de acumulação

Seja $A \subset \mathbb{R}$. O ponto $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de A e e só se

$$\forall \varepsilon > 0 \left(\mathscr{V}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Antes de procedermos à demonstração deste resultado vamos ilustrar a sua aplicação:

Exemplo 3.1.5 O ponto $a = 1$ é ponto de acumulação de $A =]0;2] \cup \{5\} \cup [6;+\infty[$, uma vez que para todo o $\varepsilon > 0$,

$$\left(]1-\varepsilon; 1+\varepsilon[\setminus \{1\}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

O ponto $a = 5$, que é aderente ao conjunto A, não é ponto de acumulação: tomando por exemplo $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, tem-se

$$\left(]5-\varepsilon; 5+\varepsilon[\setminus \{5\}\right) \cap A = \emptyset.$$

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A e $\varepsilon > 0$. Como $\left(\mathscr{V}_\varepsilon(a) \cap A\right)$ é um conjunto infinito, em particular $\left(\mathscr{V}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}\right) \cap A$ é não vazio. Caso contrário, teríamos $\mathscr{V}_\varepsilon(a) \cap A \subset \{a\}$, não sendo este conjunto infinito.
Inversamente, vamos supor que para toda a vizinhança V de a, $\left(V \setminus \{a\}\right) \cap A$ é não vazio.
Seja então $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$ e a_1 um elemento da interseção $\left(\mathscr{V}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}\right) \cap A$.

Considerando $\varepsilon_2 = d(a,a_1)$, a interseção $\Big(\mathscr{V}_{\varepsilon_2}(a) \setminus \{a\}\Big) \cap A$ é igualmente não vazia. Seja a_2 um elemento dessa interseção.
Considerando $\varepsilon_3 = d(a,a_2)$, a interseção $\Big(\mathscr{V}_{\varepsilon_3}(a) \setminus \{a\}\Big) \cap A$ é igualmente não vazia. Seja a_3 um elemento dessa interseção.
Continuando este procedimento, constroi-se assim uma sucessão de pontos (a_n) de pontos de A e uma sucessão de reais positivos (ε_n) tais que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

1. $a_n \in \mathscr{V}_{\varepsilon_n}(a)$ (por construção);
2. $\varepsilon_{n+1} = d(a,a_n) < d(a,a_{n-1}) = \varepsilon_n$ (porque a_n é escolhido por forma a pertencer à vizinhança $\mathscr{V}_{\varepsilon_n}(a)$).

Do ponto 1. decorre que para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \in \mathscr{V}_{\varepsilon_n}(a) \subset \mathscr{V}_{\varepsilon_{n-1}}(a) \subset \ldots \mathscr{V}_{\varepsilon_1}(a) = \mathscr{V}_{\varepsilon}(a).$$

Do ponto 2. decorre que todos os pontos a_n são distintos.
Assim, o conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito e está contido em $\Big(\mathscr{V}_{\varepsilon}(a)\Big)$, pelo que este conjunto é infinito. ■

Terminamos esta secção com a noção de «ponto isolado» de um conjunto A:

Definição 3.1.9: Pontos Isolados

Seja $a \in A \subset \mathbb{R}$. Este ponto diz-se «ponto isolado de A» se

$$\exists \varepsilon > 0, : \mathscr{V}_{\varepsilon}(a) \cap A = \{a\}.$$

Tomando uma vez mais o exemplo do conjunto $A =]0;2] \cup \{5\} \cup [6;+\infty[$, $a = 5$ é um ponto isolado de A uma vez que, tomando por exemplo $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, o conjunto

$$\mathscr{V}_{\varepsilon} \setminus \{a\} = \left]5 - \frac{1}{2}; 5 + \frac{1}{2}\right[\setminus \{5\}$$

não interceta A, estando por isso de alguma forma o ponto $a = 5$ isolado no conjunto A.

Naturalmente que um ponto isolado de um dado conjunto A não pode ser um ponto isolado desse conjunto. Na verdade, temos um resultado um pouco mais completo, cuja prova é deixada em exercício:

Teorema 3.1.8: Pontos isolados e de acumulação

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in A$. Então uma e apenas uma das seguintes proposições é verdadeira:

- a é um ponto isolado de A.
- a é um ponto de acumulação de A.

3.2 Conjuntos abertos, fechados e compactos

Certos subconjuntos da reta real coincidem com o seu interior. São os chamados conjuntos abertos:

Definição 3.2.1: Conjuntos abertos

Seja $A \subset \mathbb{R}$. O conjunto A diz-se «aberto» se

$$A = \operatorname{int}(A).$$

Por definição, para qualquer conjunto A, a inclusão $\operatorname{int}(A) \subset A$ é sempre verdadeira. No sentido inverso, os pontos de A ou pertencem a $\operatorname{int}(A)$ ou pertencem a ∂A. Logo, $A \subset \operatorname{int}(A)$ se e só se nenhum ponto fronteira de A pertencer a A. Provámos pois o seguinte critério:

Proposição 3.2.1 Seja $A \subset \mathbb{R}$. O conjunto A é aberto se e só de $A \cap \partial A = \emptyset$.

A par dos conjuntos abertos, introduzimos igualmente o conceito de conjunto fechado:

Definição 3.2.2: Conjuntos fechados

O conjunto $A \subset \mathbb{R}$ diz-se «fechado» se o seu complementar for aberto.

Tem-se a seguinte caracterização fundamental dos conjuntos fechados:

Proposição 3.2.2 Seja $A \subset \mathbb{R}$. O conjunto A é fechado se e só se $A = \overline{A}$.

Demonstração. Pela definição, A é fechado se A^c é aberto, isto é, se $A^c = \operatorname{int}(A^c)$. Tomando na igualdade os complementares dos conjuntos, temos

$$A = (\operatorname{int}(A^c))^c,$$

ou seja,

$$A = \operatorname{ext}(A^c) \cup \partial(A^c).$$

Das identidades $\operatorname{ext}(A^c) = \operatorname{int}(A)$ e $\partial(A^c) = \partial A$ (ver Propriedades 3.1.1 e 3.1.2) decorre agora que

$$A = \operatorname{int}(A) \cup \partial A,$$

isto é que $A = \overline{A}$. ■

Vimos na Observação 3.1.5 que $\overline{A} = A \cup \partial A$. Esta igualdade leva à seguinte caracterização dos conjuntos fechados:

Proposição 3.2.3 A é fechado se e só se $\partial A \subset A$.

Demonstração. Com efeito, da igualdade $\overline{A} = A \cup \partial A$ resulta imediatamente que $\overline{A} = A$ se e só se for verdadeira a inclusão $\partial A \subset A$. ■

Exemplo 3.2.1 O conjunto $A =]0;2] \cup \{5\} \cup [6;+\infty[$ não é aberto nem fechado. O conjunto $B =]1;4[$ é aberto e não é fechado. O conjunto $C = [-3;5] \cup \{6\}$ não é aberto e é fechado.

Finalmente, os conjuntos que são simultaneamente fechados e limitados terão um papel importante no estudo das funções reais de variável real contínuas, razão pela qual fornecemos a seguinte definição:

Definição 3.2.3: Conjuntos compactos

Seja $A \subset \mathbb{R}$. O conjunto A diz-se «compacto» se for simultaneamente fechado e limitado.

Exemplo 3.2.2 O conjunto $A =]0;2] \cup \{5\} \cup [6;+\infty[$ não é fechado nem limitado, pelo que não é compacto. O conjunto $B =]1;4[$ também não é compacto: é limitado mas não é fechado. O conjunto $C = [-3;5] \cup \{6\}$ é compacto uma vez que é simultaneamente fechado e limitado.

Exemplo 3.2.3 Consideremos o conjunto $D = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

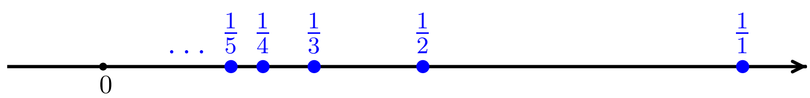


Figura 3.3: Conjunto $D = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

Este conjunto não tem pontos interiores. De facto, considerando um ponto $\frac{1}{n_0} \in D$ e tomando $\varepsilon > 0$ inferior às distâncias $\left|\frac{1}{n_0-1} - \frac{1}{n_0}\right|$ e $\left|\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1}\right|$, tem-se

$$\left]\frac{1}{n_0} - \varepsilon; \frac{1}{n_0} + \varepsilon\right[\cap D = \left\{\frac{1}{n_0}\right\},$$

pelo que $\left]\frac{1}{n_0} - \varepsilon; \frac{1}{n_0} + \varepsilon\right[\not\subset D$. Temos assim que $\operatorname{int}(D) = \emptyset$ e, por conseguinte, que todos os pontos de D são pontos fronteira: $D \subset \partial D$.

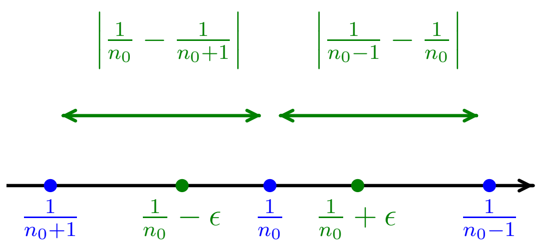


Figura 3.4: Os pontos de D são pontos fronteira de D

Mostremos agora que o ponto 0, não pertencendo a D, é também um ponto da respetiva fronteira. Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrário e consideremos o seguinte subconjunto de elementos de D :

$$D_\varepsilon :=]0-\varepsilon; 0+\varepsilon[\cap D = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge \frac{1}{n} < \varepsilon\right\}.$$

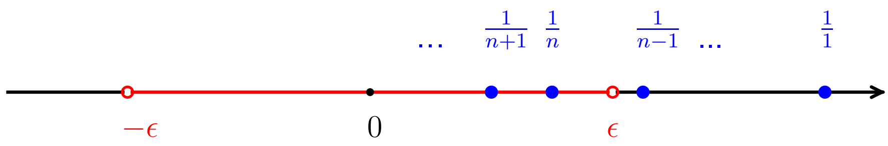


Figura 3.5: O conjunto D_ε

Dizer que $\frac{1}{n}$ pertence a D_ε é equivalente à condição $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Como o conjunto $\mathbb{N}$ não é majorado, o conjunto D_ε é infinito, e, em particular, não vazio. Logo 0 não é, por definição, um ponto exterior a D: trata-se portanto de um ponto fronteira, tal como anunciado. É fácil verificar que 0 é na verdade o único ponto do complementar de D que pertence a ∂D. Temos pois $\partial D = D \cup \{0\}$ e $\operatorname{ext}(D) = \mathbb{R} \setminus (D \cup \{0\})$.

A aderência de D é então

$$\overline{D} = \operatorname{int}(D) \cup \partial D = D \cup \{0\}.$$

O conjunto D não é aberto ($D \neq \operatorname{int}(D)$) nem é fechado ($D \neq \overline{D}$).
O conjunto D é limitado (por exemplo 0 é um minorante e 1 é um majorante), e, uma vez que não é fechado, não é compacto.

Para concluir o estudo do conjunto D, resta identificar os pontos de acumulação. De entre os pontos aderentes (pontos candidatos a pontos de acumulação), comecemos por estudar os pontos de D. Ora, dado um ponto arbitrário d de D, verifica-se claramente a existência de $\varepsilon > 0$ tal que

$$]d-\varepsilon; d+\varepsilon[\setminus \{d\} \cap D = \emptyset,$$

pelo que nenhum ponto de D é ponto de acumulação.
Por outro lado, tomando um qualquer $\varepsilon > 0$, vimos mais acima que $D_\varepsilon =]0-\varepsilon; 0+\varepsilon[\cap D$ é um conjunto infinito, pelo que se trata por definição de um ponto de acumulação de D. Assim, $D' = \{0\}$.

3.3 Exercícios

Exercício 3.3.1 Mostre a Proposição 3.1.1.

Exercício 3.3.2 Utilizando cuidadosamente as leis de De Morgan, prove o Teorema 3.1.3

Exercício 3.3.3 Mostre o Teorema 3.1.8.

Exercício 3.3.4 Para cada conjunto, indique o respetivo interior, fronteira, aderência, exterior e derivado e e indique se se trata de um conjunto aberto, fechado, limitado ou compacto:

(a) $A =]-\infty; 8] \cup]15; +\infty[$

(b) $B =]-4; 11[\setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

(c) $C = \left[0; \frac{7}{3}\right] \cup \{\pi\}$

(d) $D =]-\infty; 3[\cup \left]\frac{11}{3}; 7\right[$

Exercício 3.3.5 Escreva os seguintes conjuntos na forma de intervalos (ou de união disjunta de intervalos) e indique se se tratam de conjuntos abertos, fechados, limitados ou compactos:

(a) $\{x \in \mathbb{R} : |x-4| < 3\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : |2-x| \geq 1\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > |x-5|\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x \wedge |5x| \leq 2\}$

Exercício 3.3.6 Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}$,

$$A_1 = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, A_2 = \left\{\frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}, A_3 = \left\{m + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

(a) Determine o interior, a aderência e o derivado de A_1, A_2 e A_3.
(b) Indique, para cada conjunto, se se trata de um conjunto aberto, fechado, limitado ou compacto.

Exercício 3.3.7 Determine o interior, a fronteira e o derivado de cada um dos seguintes conjuntos:

$$A = [0,2[\cup]3,5[\cup\{6,7\}; \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\}; \qquad C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-3| \leq 5\};$$

$$D = \left\{1 + (-1)^n \frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}; \qquad E = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+3} > \frac{x}{x-2}\right\} \qquad F = [1,2] \cap \mathbb{Q}.$$

Exercício 3.3.8 Caso exista, dê um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que seja

(a) Finito não vazio e aberto;
(b) Fechado e não limitado;
(c) Igual ao seu derivado;
(d) Igual à sua fronteira;
(e) Finito e não majorado;
(f) Limitado e nem aberto nem fechado.

Exercício 3.3.9 Mostre que um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ não admite nem máximo nem mínimo.

Exercício 3.3.10 Seja $A \subset \mathbb{R}$. Mostre que
(a) A é simultaneamente aberto e fechado sse $\partial A = \emptyset$;
(b) $\partial A = \emptyset$ sse $A \in \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

Exercício 3.3.11 Dê um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ cuja fronteira seja o conjunto $\mathbb{Q}$.

Exercício 3.3.12
(a) Seja $A \subset \mathbb{R}$ e S o supremo de A. Mostre que S é um ponto da aderência de A.
(b) Qual o valor lógico da proposição ”O ínfimo de um conjunto pertence à sua aderência.”? Justifique.

Exercício 3.3.13 Seja $C = A \cap B$, em que $A = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x}{3-|x|} \geq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 4\}$.

(a) Escreva o conjunto C na forma de união disjunta de intervalos.
(b) Mostre que C é um conjunto limitado.
(c) Mostre que o conjunto C não é aberto.
(d) O conjunto C é compacto? Justifique.

Exercício 3.3.14 Considere os conjuntos $A = [-\sqrt{3};0]$ e $B = \left\{(-1)^{n-1}\dfrac{4}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

(a) Determine o interior, a aderência e o derivado de B.
(b) Escreva $A \cup B$ na forma de união disjunta de conjuntos.
(c) Mostre que $A \cup B$ é um conjunto limitado.
(d) Determine o interior, a aderência e o derivado de $A \cup B$.
(e) Justifique que $A \cup B$ não é aberto.
(f) A união $A \cup B$ é um conjunto compacto? Justifique.

Exercício 3.3.15 Seja B um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Mostre que:

(a) o interior de B é um conjunto aberto;
(b) a aderência de B é um conjunto fechado;
(c) o derivado de B é um conjunto fechado.