A Matemática e o Cosmos - *À Escala de Planck*

1. As unidades de Planck

As unidades primárias do Sistema Internacional *SI* (metro, quilograma, segundo, ampere, kelvin) são, do ponto de vista do mundo natural, arbitrárias, não representando de forma alguma medidas fundamentais do Universo.

No início do século XX, Max Planck, o fundador da física quântica, teve a ideia de utilizar cinco constantes universais para formar um sistema cujas unidades primárias tivessem significado físico. Essas cinco constantes são as seguintes:

A velocidade da luz no vácuo c

$$c = 299\,792\,458\,SI.$$

A constante universal de gravitação G

$$G = 6,67428.10^{-11}\,SI.$$

A norma da força com que se atraem dois pontos materiais m_1 e m_2 colocados a uma distância $r > 0$ um do outro é dada por

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

A permissibilidade eléctrica do vácuo ϵ_0

$$\epsilon_0 = 8,854187.10^{-12}SI.$$

A norma da força com que se atraem/repulsam duas cargas q_1 e q_2 colocadas a uma distância $r > 0$ uma da outra é dada por

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

A constante de Planck reduzida $\hbar$

$$\hbar = 1\,054\,571\,726.10^{-34} SI.$$

A energia de um fotão associado a uma onda electromagnética de frequência angular $\omega = 2\pi f$ é dada por

$$E = \hbar\omega$$

A constante de Boltzmann k

$$k = 1,3806504.10^{-23}\, SI.$$

A energia cinética média de uma partícula de um gás perfeito a uma temperatura T é dada por

$$E_c = \frac{3}{2}kT.$$

Exercício 1

a. Qual a dimensão física de G? De $\hbar$?

b. O que poderíamos chamar de "distância de Planck"? De "tempo de Planck" ?

2. Princípio de incerteza de Heisenberg e efeitos gravitacionais: O sentido físico da distância de Planck

Em Mecânica Clássica a segunda Lei de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) permite obter de forma determinista a posição de uma partícula em qualquer instante, conhecida por exemplo a sua posição e velocidade inicial assim como as forças que nela se exercem. Por exemplo:

Exercício 2

Considere um referencial ortonormado do espaço e um ponto material P de massa $m = 1kg$. No instante $t = 0$, P ocupa a posição $(2, 3, 3)$ e tem por velocidade $\vec{v}_0 = (1, 1, 1)$. Sabendo que P se encontra constantemente submetido à força da gravidade $\vec{F} = m\vec{g} = (0, 0, -10)$, determine a posição de P no instante $t = 5s$.

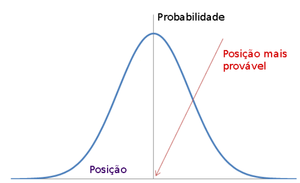
Em Física quântica, a segunda Lei de Newton é substituída pela equação de Schrödinger

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\Psi'', \qquad \text{(caso unidimensional com potencial nulo)}$$

onde Ψ é a **função de onda** e Ψ'' representa a segunda derivada espacial de Ψ.

Contrariamente ao caso clássico, esta equação apenas fornece uma distribuição probabilista a que obedecerá qualquer tentativa de medir a posição da partícula. Essa distribuição tem densidade $|\Psi(x,t)|^2$, tendo-se em particular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1.$$



Exercício 3

Considere uma solução $\Psi(x,t)$ da equação de Schrödinger, com $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,0)|^2 dx = 1$. O objetivo deste exercício é mostrar que para todo o $t > 0$ se tem de facto que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$.

a. Mostre que

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t}\overline{\Psi} = -\frac{\hbar}{2m}\Big((\Psi'\overline{\Psi})' - |\Psi'|^2\Big).$$

b. Tomando a parte imaginária, deduza que

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}|\Psi|^2 = -\frac{\hbar}{2m}Im(\Psi'\overline{\Psi})'.$$

c. Conclua.

O análogo, em Mecânica Clássica, da quantidade de movimento é uma quantidade **P** ligada à função de onda Ψ pela **Transformada de Fourier**. Esta transformada tem a seguinte propriedade: quanto melhor for conhecida a posição X de uma partícula (ou seja, o desvio padrão σ da probabilidade tende para 0: $\sigma \to 0$), menos informação haverá sobre o seu momento, e vice-versa, segundo o **princípio de incerteza de Heisenberg**:

$$\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}.$$

É pois de facto possível, em teoria, medir a posição X de uma partícula com uma precisão tão pequena quanto se queira, com a condição de se ter uma grande incerteza na medida da quantidade de movimento P. Para isso, é fácil ver que é preciso considerar partículas com uma massa arbitrariamente grande, sendo essa a única forma de se obter um erro grande sobre a quantidade de movimento $m\vec{v}$. Há no entanto uma limitação sobre a massa de uma partícula: se for demasiado massiva perfurará o espaço-tempo criando uma singularidade (um buraco negro). Assim, a combinação dos efeitos quânticos e gravitacionais implicam a existência de um erro absoluto mínimo em qualquer medição de uma distância.
É esse o sentido físico da distância de Planck d_{Planck}:

$$\Delta X \geq d_{Planck}.$$

Consequentemente:

Não faz sentido falar de distâncias inferiores à distância de Planck. De forma análoga, não faz sentido falar de intervalos de tempo inferiores ao tempo de Planck. Em particular, o que terá acontecido entre o instante $t = 0$ do Cosmos (big-bang) e o tempo de Planck é-nos inacessível.

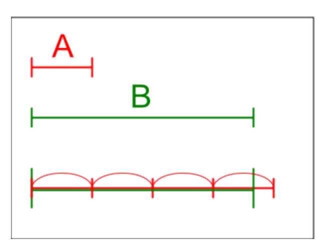
3. Uma métrica não-arquimediana

Elementos de Euclides [$\Sigma\tau o\iota\chi\epsilon\iota\alpha$ $E\upsilon\kappa\lambda\epsilon\iota\delta o\upsilon$]**, Livro V, Definição 5:**

Uma métrica diz-se **arquimediana** se dadas quaisquer distâncias A e B, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $NA > B$.

Pelo exposto na secção anterior, o Universo não poderá ser modelado, abaixo da escala de Planck, por uma métrica arquimediana.

Une pista poderá ser construir uma métrica não arquimediana: **a métrica p-ádica sobre o conjunto dos racionais** $\mathbb{Q}$.



Começamos por fixar um número primo $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$.

Definição Seja q un racional não nulo. Chamamos **valuação p-ádica de** q ao único inteiro $\nu_p(q) = \alpha \in \mathbb{Z}$ tal que

$$q = p^\alpha \frac{a}{b},$$

onde a e b são números inteiros primos com p. Por convenção, define-se ainda $\nu_p(0) = \infty$.

Exercício 4

a. Calcule $\nu_5(45)$, $\nu_5(7)$, $\nu_5\left(\frac{45}{11}\right)$ e $\nu_5\left(\frac{3}{25}\right)$, .

b. O que dizer da valuação p-ádica de um número natural?

c. Mostre que $\nu_p(q \times q') = \nu_p(q) + \nu_p(q')$.

d. Mostre que $\nu_p(q + q') \geq \min\{\nu_p(q), \nu_p(q')\}$.

Falemos agora um pouco da noção de distância: Em Matemática, uma **distância** é uma função que a dois pontos X e Y associa um número positivo $d(X, Y)$ tal que:

1. Para todos X,Y, $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.
2. Para todos X,Y, $d(X, Y) = d(Y, X)$ (simetria).
3. Para todos X,Y,Z, $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$ (desigualdade triangular).

Naturalmente, a distância euclidiana usual definida no plano por

$$d_{euclidiana}(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad \text{onde } X = (x_1, x_2) \text{ e } Y = (y_1, y_2)$$

verifica estes três axiomas. Mas existem muitas outras distâncias...

Exercício 5

Mostre que a distância dita "do taxi",

$$d_{taxi}(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

é de facto uma distância.

Introduzimos agora a distância p-ádica entre dois racionais:

Definição Dados racionais q e q', seja

$$d_p(q, q') = \left(\frac{1}{p}\right)^{\nu_p(q-q')}$$

a distância p-ádica entre q e q'.

Exercício 6

a. Calcule $d_3(2,4)$ e $d_3(2,83)$.

b. Mostre, utilizando o exercício 4-d, que para todos os racionais X, Y, Z,

$$d_p(X,Y) \leq \max(d_p(X,Z), d_p(Z,Y)).$$

c. Mostre que d_p é de facto uma distância.

d. Observando que , mostre que a distância p-ádica é não-arquimediana, começando por estimar estime $d_p(0,N)$, onde $N \in \mathbb{N}$.

Exercício 7

a. Mostre que num espaço ultramétrico, todo o triângulo é isósceles.

As únicas distâncias que se podem construir sobre os racionais tal que $|x| = d(0,x)$ seja um módulo ($|xy| = |x| \times |y|$) são a distância usual e as distâncias p-ádicas (Teorema de Ostrowski, 1916).