Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Exame de admissão de matemática

Alunos internacionais

Tópicos de Resolução

Data: 06/06/2023 **Duração:** 180 min

Parte 1

As opções corretas estão assinaladas a **verde**.

1. A senha de acesso a um determinado serviço na internet é constituído por seis caracteres. Dois desses caracteres são obrigatoriamente algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9) e os quatro restantes são obrigatoriamente vogais maiúsculas (A, E, I, O ou U). Por exemplo, AA2E2U e U1IEA8 são senhas válidas. Quantas senhas válidas existem?

(A) **937 500** (B) 318 750 (C) 1 875 000 (D) 468 750

2. A soma dos elementos de uma dada linha do triângulo de Pascal é igual a 4096. Qual é o quarto elemento dessa linha?

(A) **286** (B) 495 (C) 220 (D) 715

3. Considere a função definida em $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ pela expressão $f(x) = 2\log_5\left(\frac{x^3}{25}\right)$. Qual das seguintes expressões define também a função f?

(A) $3\log_5(x)$ (B) $6\log_5(x) - 4$ (C) $6\log_5\left(\frac{x}{25}\right)$ (D) $6\log_5(x) - 50$

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \sin(e^{3x})$. Qual das seguintes expressões define a função derivada de f ?

(A) $\cos(3e^{3x})$ (B) $3e^{3x}\cos(3e^{3x})$ (C) $3\cos(e^{3x})$ (D) $3e^{3x}\cos(e^{3x})$

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \ln(3x)$ e o ponto M, interseção do respetivo gráfico com o eixo das abcissas. Qual das seguintes equações define a reta tangente ao gráfico da função f no ponto M?

(A) $y = x - \frac{1}{3}$ (B) $y = 6x - 2$ (C) $y = 6x - 3$ (D) $\boldsymbol{y = 3x - 1}$

6. Quantas raízes da equação $z^9 = 2$ têm por imagem geométrica pontos do segundo quadrante?

(A) Nenhuma (B) **Duas** (C) Três (D) Quatro

7. Considere uma função f de domínio $\mathbb{R}$ e de contradomínio $[-3, 5]$. Qual o contradomínio da função g definida em $\mathbb{R}$ pela expressão $g(x) = |f(x-1)|+3$?

(A) $[6, 8]$ (B) $[5, 7]$ (C) $[3, 5]$ (D) $\boldsymbol{[3, 8]}$

Parte 2

1. Considere um número complexo não nulo, z, tal que $\mathrm{Re}(z) > 0$ e $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Re}(z)$. A que quadrante do plano complexo pertence a imagem geométrica de z^{27}?

Solução: O número complexo referido pode escrever-se na forma $z = \rho e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $\rho > 0$, pelo que $z^{27} = \rho^{27} e^{-i\frac{27\pi}{4}}$. Notando que $-\frac{27\pi}{4} = -7\pi + \pi/4$, podemos concluir que o afixo do número complexo z^{27} está no terceiro quadrante.

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Dado um acontecimento $X \subset \Omega$, denota-se por $P(X)$ a probabilidade de X e por $\bar{X}$ o acontecimento contrário de X. Sejam A e B acontecimentos, com $P(B) < 1$. Justifique que $P(\overline{B}) \neq 0$ e prove de seguida que

$$P(A \cap B) = P(A) - P(\bar{B}) + P(\bar{A}|\bar{B}) \times P(\bar{B}).$$

Solução: Tem-se $P(\overline{B}) = 1 - P(B) > 1 - 1 = 0$ uma vez que $P(B) < 1$. Também,

$$P(A) - P(\overline{B}) + P(\overline{A}|\overline{B}) \times P(\overline{B})$$

$$= P(A) - P(\overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \text{ [definição da probabilidade condicionada]}$$

$$= P(A) - P(\overline{B}) + P(\overline{A \cup B}) \text{ [Lei de De Morgan]}$$

$$= P(A) - P(\overline{B}) + 1 - P(A \cup B) \text{ [probabilidade do complementar]}$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \text{ [probabilidade do complementar]}$$

$$= P(A \cap B).$$

3. Colocam-se ao acaso 5 moedas de um 1 euro e 6 moedas de 50 cêntimos num tabuleiro quadrado de 16 casas.

(a) Qual a probabilidade de uma das quatro linhas horizontais ficar totalmente por preencher?

Solução: O número de casos possíveis corresponde a colocar as 5 moedas de 1 euro em dezasseis casas possíveis, colocando depois as seis moedas de cinquenta cêntimos nas 11 casas restantes. Assim, o número de casos possíveis pode ser calculado dado por

$$\binom{16}{5} \times \binom{11}{6} = 2018016$$

O número de casos favoráveis, isto é, o número de configurações em que fica uma linha sem qualquer moeda, pode ser calculado do seguinte modo: i. Escolhemos qual das quatro linhas ficará vazia; ii. colocamos as cinco moedas de um euro nas doze casas fora da linha vazia; iii. colocamos as seis moedas de cinquenta cêntimos nas sete casas restantes. Assim, o número de casos favoráveis é dado por

$$4 \times \binom{12}{5} \times \binom{7}{6} = 22176,$$

e a probabilidade pedida é

$$\frac{4 \times \binom{12}{5} \times \binom{7}{6}}{\binom{16}{5} \times \binom{11}{6}} = \frac{1}{91}.$$

Nota: $\binom{n}{p}$ representa o número de combinações de n objetos p a p, isto é

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

(b) Qual a probabilidade de uma das diagonais ficar preenchida com moedas do mesmo valor?

Solução: O número de casos possíveis já foi discutido na alínea anterior. Relativamente ao número de casos favoráveis, podemos começar por escolher qual das duas diagonais estará preenchida por moedas de igual valor e, consoante sejam moedas de um euro ou de cinquenta cêntimos, dispor as restantes moedas das doze casas restantes. É depois necessário descontar as situações em que as duas diagonais estão preenchidas com moedas do mesmo valor. Concretamente, o número de casos favoráveis é dado por

$$2 \times \left(\binom{12}{1} \times \binom{11}{6} + \binom{12}{2} \times \binom{10}{5} \right) - 2 \times \binom{8}{1} \times \binom{7}{2} = 44016,$$

sendo a probabilidade pedida

$$\frac{2 \times \left(\binom{12}{1} \times \binom{11}{6} + \binom{12}{2} \times \binom{10}{5} \right) - 2 \times \binom{8}{1} \times \binom{7}{2}}{\binom{16}{5} \times \binom{11}{6}} = \frac{44016}{2018016} = \frac{131}{6006}.$$

4. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}^+$, definida pela expressão

$$f(x) = 3x - 2\ln x + \frac{1}{x}.$$

Utilizando meios exclusivamente analíticos:

(a) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

Solução: Tem-se, para todo o $x > 0$,

$$f'(x) = 3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2} = \frac{3(x-1)(x+\frac{1}{3})}{x^2}$$

uma vez que as raízes do polinómio de segundo grau $P(x) = 3x^2 - 2x - 1$ são $x_1 = 1$ e $x_2 = -\frac{1}{3}$.
Assim,

- $f'(x) < 0$ for $x \in]0; 1[$;
- $f'(x) = 0$ for $x = 1$;
- $f'(x) > 0$ for $x \in]1; +\infty[$.

Finalmente, f é decrescente em $]0; 1]$, crescente em $[1; +\infty[$ e f atinge um mínimo global em $x = 1$.

(b) Estude o sentido das concavidades do gráfico de f.

Solução: Para todo o $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2x+2}{x^3} > 0.$$

Assim, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

(c) Estude a existência de assintotas ao gráfico de f.

Solução: Tem-se $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3 \times 0 - 2(-\infty) + (+\infty) = +\infty$, pelo que $x = 0$ e uma assintota vertical ao gráfico de f.
Estudamos agora a existência de assintotas em $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 - 0 + 0 = 3,$$

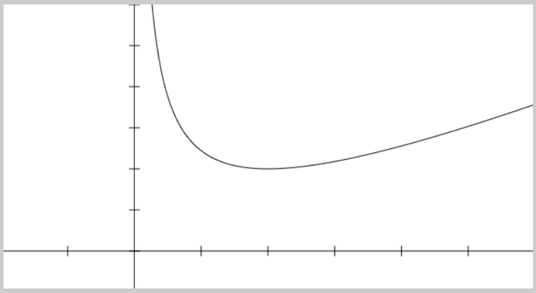
e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 3x = \lim_{x \to +\infty} -2\ln(x) + \frac{1}{x} = -\infty,$$

e o gráfico de f não admite assintota em $+\infty$.

(d) Faça um esboço do gráfico de f.

Solução:



5. Seja f a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por

$$\begin{cases} \dfrac{7x}{e^{3x}-1}, & \text{if } x > 0 \\ \dfrac{\sin(7x)}{3x}, & \text{if } x < 0 \end{cases}.$$

Responda às seguintes questões utilizando métodos exclusivamente analíticos:

(a) Indique, justificando, que valor se deve atribuir a $f(0)$ por forma a obter-se uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Solução: Começamos por notar que a função é contínua para $x \neq 0$. De facto, quando $x > 0$, a função é definida pelo quociente de funções contínuas (polinómio e soma de exponencial com uma constante), em que o denominador não se anula (porque $x \neq 0$), sendo por isso contínua. Quando $x < 0$ a função é também quociente de funções contínuas (seno e polinómio) em que o denominador não se anula (porque $x \neq 0$), pelo que é também contínua. Assim, será possível prolongar continuamente f ao conjunto $\mathbb{R}$ se e só se for possível prolongá-la continuamente a $x = 0$.

Ora, para que f seja contínua em $x = 0$ é necessário e suficiente que

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Observando que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{3x} = \frac{7}{3} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{7x}}_{=1} = \frac{7}{3}$$

e que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{7x}{e^{3x}-1} = \left(\frac{3}{7} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x}}_{=1} \right)^{-1} = \frac{7}{3},$$

podemos concluir que se definirmos $f(0) = \frac{7}{3}$ obtemos uma função contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Mostre, utilizando o teorema do valor intermédio, a existência de um ponto $x_0 \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{14}\right[$ tal que $f(x_0) = 1$.

Solução: Já ficou estabelecido na alínea anterior que a função f é contínua no intervalo $\left]-\pi, -\frac{\pi}{14}\right[$. Como $f(-\pi) = 0$ e $f(-\pi/14) = \frac{14}{3\pi}$, o teorema do valor intermédio garante que, no intervalo referido, a função f toma todos os valores compreendidos entre 0 e $\frac{14}{3\pi}$. Em particular, como $0 < 1 < \frac{14}{3\pi}$, existe pelo menos um ponto $x_0 \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{14}\right[$ tal que $f(x_0) = 1$.

6. Considere a função f definida em $[0, +\infty[$ pela expressão $f(x) = \ln(3x + e^x)$.

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solução:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;$

(b) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

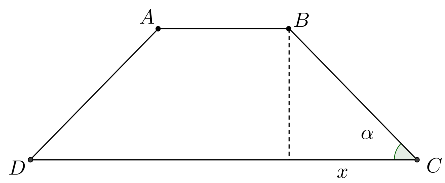
Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+e^x}{3x+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{e^x}+1}{\frac{3x}{e^x}+1} = 1;$$

7. Considere um trapézio isóceles $[ABCD]$ com $\overline{BC} = \overline{AD} = 7cm$, $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{AB} = 5cm$. Seja $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ a amplitude, em radianos, do ângulo $D\hat{C}B$.

(a) Mostre que a medida da área de $[ABCD]$ é dada, em cm^2, por

$$A(\alpha) = 49 \sin\alpha \cos\alpha + 35 \sin\alpha.$$



Solução: $A(\alpha) = \dfrac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2}.h$, sendo h a altura do trapézio.
Como $\sin\alpha = \frac{h}{7}$ e $\cos\alpha = \frac{x}{7}$, obtemos que $h = 7\sin\alpha$ e $x = 7\cos\alpha$;
Temos então $\overline{AB} = 5$ e $\overline{CD} = 5 + 2x = 5 + 14\cos\alpha$;
Assim,

$$A(\alpha) = \frac{10 + 14\cos\alpha}{2}.7\sin\alpha = 35\sin\alpha + 49\sin\alpha\cos\alpha$$

(b) Calcule $A'(\alpha)$.

Solução:
$A'(\alpha) = 49\cos^2\alpha - 49\sin^2\alpha + 35\cos\alpha$

(c) Calcule o valor de $A(\alpha)$ sabendo que $\tan\alpha = 5$.

Solução: Sabemos que $\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$. Sendo $\tan\alpha = 5$ obtemos $\cos^2\alpha = \frac{1}{26}$ e logo, visto que $\alpha \in]0, \frac{\pi}{/}2[$,

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26} \quad \text{e} \quad \sin\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26};$$

Donde,

$$A(\alpha) = \frac{49.5 + 35.5\sqrt{26}}{26} = \frac{245 + 175\sqrt{26}}{26.}$$

Cotações:

Parte I

Pergunta	1	2	3	4	5	6	7
Pontos	1	1	1	1	1	1	1

Parte 2

Pergunta	1	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	5a	5b	6a	6b	7a	7b	7c
Pontos	1	1	1	1	1	0.5	0.5	0.5	1	1	0.5	1	1	1	1