ISEG Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Exame de Admissão de Matemática

Alunos Internacionais

Data: 16/02/2024 **Duração:** 180 min

Parte 1

Em cada uma das seguintes questões selecione a opção correta. Não precisa de apresentar os cálculos efetuados. Cada resposta certa vale 1 ponto. Cada resposta incorreta é penalizada em 0,2 pontos.

1. Considere os números naturais de 5 algarismos. Destes números, quantos têm exatamente três algarismos 8 e são menores do que 40000?

(A) 108 (B) 120 (C) 300 (D) 128

2. Existe uma linha do triângulo de Pascal cujos oitavo e décimo segundo elementos são iguais. Qual o maior elemento da linha seguinte?

(A) 28600 (B) 184756 (C) 92378 (D) 75582

3. Considere a função definida em $\mathbb{R}^+$ pela expressão $f(x) = \ln(e^2x^3) - \ln x$. Qual das seguintes expressões define também a função f?

(A) $2(1 + \ln x)$ (B) $2 - \ln x$ (C) $3 + \ln x$ (D) $2 + 3\ln x$

4. Considere o número complexo $z = a + ia$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

(A) $2z$ é um número real.

(B) z^2 é um imaginário puro.

(C) z^2 é um número real.

(D) $|z| = a$.

5. Considere a função real de variável real definida pela expressão $f(x) = e^{x^2+x}$ e seja M o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das ordenadas. Qual das seguintes equações define a reta tangente ao gráfico da função f no ponto M?

(A) $y = x + 1$ (B) $y = x + e$ (C) $y = ex - e$ (D) $y = ex + 1$

6. Considere uma função f de domínio $\mathbb{R}$ e imagem $[-3, 5]$. Qual a imagem da função g definida em $\mathbb{R}$ pela expressão $g(x) = -f(x + 3) + 3$?

(A) $[3, 11]$ (B) $[1, 9]$ (C) $[-3, 5]$ (D) $[-2, 6]$

7. Considere a a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \ln(1+\sin^2 x)$. Qual das seguintes expressões define a função derivada de f?

(A) $\dfrac{1}{1 + \sin^2 x}$ (B) $\dfrac{2\cos x}{1 + \sin^2 x}$ (C) $\dfrac{2\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x}$ (D) $\dfrac{2\sin x}{1 + \sin^2 x}$

Parte 2

Justifique detalhadamente cada uma das suas respostas.

1. Considere o número complexo $\omega = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(a) Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $z^3 + \overline{\omega} = 0$.

(b) Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que ω^n é um número real negativo.

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Dado um acontecimento $X \subset \Omega$, denota-se por $P(X)$ a probabilidade de X e por $\bar{X}$ o acontecimento contrário de X.

Sejam acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$ tais que

$$P(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}) = 3P(A \cap B) \text{ e } P(A \cap B) = P(A \cap \overline{B}).$$

Mostre que

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(A \cup \overline{B}).$$

3. Um jogador profissional de basquetebol tem uma probabilidade $p = 0,9$ de encestar um lançamento livre. Este jogador vai executar 5 lançamentos consecutivos.

(a) Qual é a probabilidade de encestar os 5?

(b) Qual é a probabilidade de falhar exatamente 2 lançamentos?

4. Considere a função real de variável real definida pela expressão

$$f(x) = 4x + \sin(2x).$$

Utlizando meios exclusivamente analíticos:

(a) Estude a função quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

(b) Indique o domínio e contradomínio da função derivada da função f, f'.

(c) Indique o conjunto dos valores de x para os quais $f''(x) = 0$.

(d) Estude a existência de assintotas ao gráfico de f.

5. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{e^{x-1}-1} & \text{se } x < 1 \\ \\ \ln(ex) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade da função f em $\mathbb{R}$.

(b) Sem efetuar cálculos, justifique que a função tem um máximo e um mínimo absoluto no intervalo $[2,3]$.

(c) Determine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

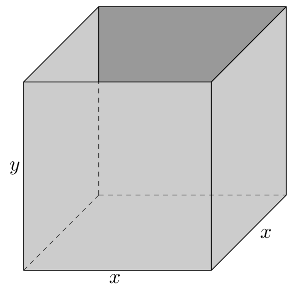
(d) Mostre, utilizando o teorema do valor intermédio, a existência de $c \in]2,3[$ tal que $f(c) = 2$.

6. Pretende-se construir uma caixa, com base quadrada de medida x cm, altura de medida y cm e aberta no topo (ver figura), que tenha um volume de $32\,\text{cm}^3$.

(a) Mostre que a área da superfície da caixa é dada por

$$A(x) = \frac{128}{x} + x^2.$$

(b) Determine as dimensões da caixa de modo a que a área da superfície seja o menor possível. Indique o valor dessa área.



Cotações:

Parte I

Pergunta	1	2	3	4	5	6	7
Pontos	1	1	1	1	1	1	1

Parte 2

Pergunta	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	5a	5b	5c	5d	6a	6b
Pontos	1	1	1	1	1	0.5	0.5	1	1	1	0,5	0,5	1	1	1